

Sommario

1	I SISTEMI DI CONTROLLO	4
1.1	Introduzione	4
1.1.1	Sistemi di controllo ad anello aperto	5
1.1.2	Sistemi di controllo a previsione	7
1.1.3	Sistemi di controllo ad anello chiuso lineari.....	8
1.1.4	Sistemi di controllo ad anello chiuso ON-OFF	10
1.1.5	Sistemi di controllo programmati.....	10
2	I METODI DI ANALISI DEI SISTEMI DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO LINEARI	12
2.1	Le specifiche dei sistemi di controllo	12
2.2	La funzione di trasferimento di un sistema di controllo a retroazione	12
2.2.1	Tipo di sistema di controllo.....	14
2.2.2	Guadagno statico ad anello aperto.....	14
2.2.3	Sistemi a retroazione unitaria.....	14
2.3	La risposta nel dominio del tempo dei sistemi retroazionati del 1° ordine	15
2.4	La risposta nel dominio del tempo dei sistemi retroazionati del 2° ordine	16
2.5	Regolazione PWM di un motore in c.c.	17
3	SISTEMI DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO NON LINEARI.....	18
3.1	Introduzione	18
3.2	Sistemi di controllo ON-OFF	18
3.3	Un esempio: controllo di temperatura ON-OFF.....	19
4	LA STABILITA'	20
4.1	Introduzione	20
4.2	Criterio generale	20
4.3	Stabilità dei sistemi ad anello chiuso: il criterio di Bode.....	21
4.3.1	Margine di fase e margine di guadagno	22
4.4	Le reti correttrici	23
4.4.1	Reti correttrici a polo dominante	24

5	ESEMPI	25
5.1	Esempio 1: controllo di temperatura.....	25
5.2	Esempio 2: controllo di velocità di un motore in corrente continua.	25

1 I SISTEMI DI CONTROLLO

1.1 Introduzione

I sistemi di controllo assumono una importanza fondamentale nella vita quotidiana. Esistono sistemi di controllo nei frigoriferi, nei forni a microonde, nelle centrali di produzione dell'energia elettrica, nei cicli di produzione di beni di uso comune, ecc..

Per comprendere quali siano gli scopi di un sistema di controllo si consideri il seguente esempio.

In un impianto di riscaldamento di un edificio è necessario riscaldare l'acqua in modo che la temperatura all'interno dell'edificio assicuri un adeguato confort alle persone presenti in esso.

La temperatura dell'acqua deve essere innalzata o abbassata al fine da compensare le maggiori o minori perdite di calore che si hanno attraverso le pareti o le finestre in base all'abbassamento od innalzamento della temperatura esterna.

A tal fine possono essere utilizzate metodologie differenti.

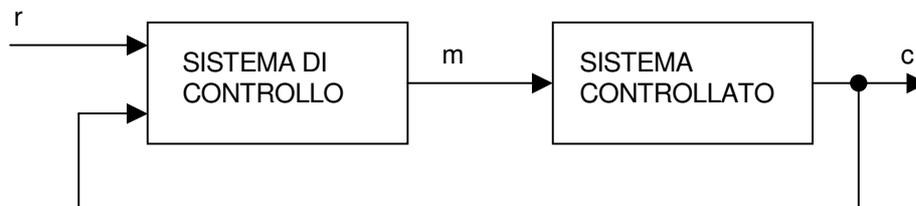
Si può utilizzare un semplice termostato che regola la temperatura all'interno della caldaia in modo che non scenda sotto o i 50° o sopra gli 80°.

E' evidente che tale metodo non è adeguato perché porterebbe ad un dispendio di calore durante le giornate calde e forse una temperatura troppo bassa durante le giornate fredde.

In pratica si utilizza un circuito elettronico che **confronta** istante per istante la temperatura interna con la temperatura di **riferimento** e contemporaneamente **comanda** una valvola che regola il flusso dell'acqua calda nei radiatori.

In sintesi possiamo affermare che:

Un sistema di controllo è un dispositivo che consente di regolare l'andamento temporale di una o più grandezze di uscita di un sistema controllato.



r: variabile di riferimento (ciò che vogliamo)

m: variabile manipolabile

c: variabile controllata (ciò che effettivamente abbiamo)

Negli apparati di controllo più semplici e diffusi l'obiettivo della regolazione è l'inseguimento, cioè ottenere istante per istante la proporzionalità di **c** rispetto ad **r**.

$$c(t) = K_R \cdot r(t)$$

dove K_R è la **costante di regolazione**.

Esempio: impianto di riscaldamento di un edificio

In questo caso si ha che:

- c: temperatura interna dell'edificio
 r: ingresso analogico del termostato
 m: segnale di comando dell'impianto di riscaldamento

Sistema controllato: edificio + impianto di riscaldamento

Sistema di controllo: centralina di regolazione termostatica

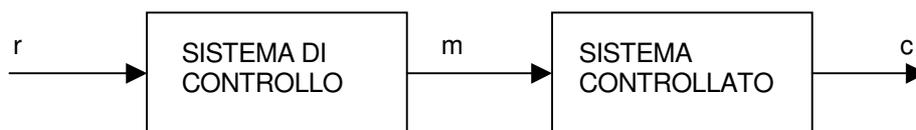
In particolare, se il segnale di comando è booleano siamo in presenza di una regolazione ON-OFF, mentre se il segnale di comando è di tipo analogico siamo, molto probabilmente, in presenza di una regolazione PID.

Le caratteristiche dei sistemi di controllo permettono una loro prima classificazione di massima:

- ad anello aperto
- a previsione
- ad anello chiuso lineari
- ad anello chiuso ON-OFF
- a microprocessore

1.1.1 Sistemi di controllo ad anello aperto

Nei sistemi di controllo ad anello aperto il segnale di riferimento r è generalmente determinato da un congegno di controllo, tarato in sede di fabbricazione in base ad un modello matematico del sistema controllato.



Qualora le condizioni di funzionamento siano diverse da quelle previste, a causa di disturbi esterni e/o variazioni dei parametri, la variabile di uscita c si discosta dal valore predeterminato.

In tal caso occorre intervenire manualmente sul dispositivo di controllo.

Si prenda come esempio il sistema di riscaldamento di una stanza rappresentato da un ventilconvettore dotato di una manopola di regolazione dotata di cinque posizioni 0-1-2-3-4. Al mattino, dopo essere entrati in ufficio si pone la manopola nella posizione adeguata a seconda della temperatura richiesta. Se durante la giornata variano le condizioni ambientali esterne, oppure viene aperta troppo frequentemente la porta di ingresso, oppure varia la temperatura del fluido termico, la temperatura della stanza può subire una variazione non desiderata.

In sostanza un sistema di controllo ad anello aperto è sensibile a:

- variazioni di carico
- variazioni dei parametri del sistema controllato
- disturbi esterni

Esempio: controllo ad anello aperto di un motore in c.c..

Si consideri il solito motore in corrente continua ad eccitazione costante. Si vuole costruire un dispositivo, che agendo sulla tensione di armatura v_A mediante un segnale di comando in tensione v_R , renda soddisfatta, istante per istante, la seguente relazione nel dominio complesso:

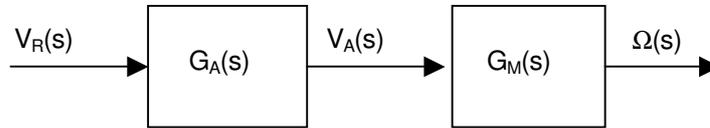
$$\Omega(s) = G(s) \cdot V_R(s)$$

Se si fa l'ipotesi semplificativa che v_R ed il carico applicato all'albero varino molto lentamente in modo tale da poter fare riferimento ad un modello statico del motore in c.c. la relazione tra ingresso ed uscita si riduce alla semplice funzione algebrica.

$$\omega(t) = K_R \cdot v_r(t)$$

dove K_R è la costante di regolazione.

La relazione precedente può essere ottenuta mediante il seguente controllo ad azione diretta.

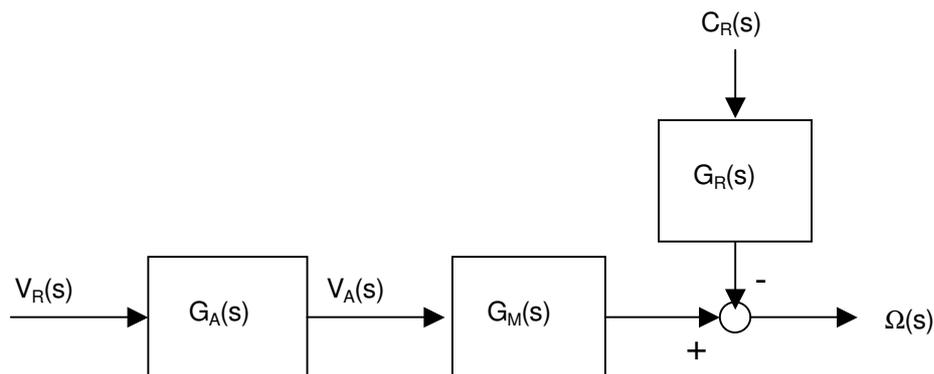


$G_A(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento dell'amplificatore di potenza che genera la tensione di armatura $V_A(s)$ che alimenta il motore. $G_M(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento che descrive il comportamento del motore stesso.

In realtà il modello precedente non è adeguato perché non tiene conto dell'influenza della coppia resistente sul funzionamento del motore.

Il seguente modello prende in considerazione anche la coppia motrice:

$$\Omega(s) = G(s) \cdot V_R(s) - G_R(s) \cdot C_R(s)$$



Tale controllo presenta alcuni inconvenienti:

- a) La velocità angolare del motore è funzione, oltre che della tensione di comando anche di altre variabili come la coppia resistente c_R . La coppia resistente è una variabile di ingresso non manipolabile e non prevedibile e, come tale, rappresenta un disturbo per il funzionamento corretto (o desiderato) del motore ed introduce un errore $E(s)$ quantificabile nel modo seguente:

$$E(s) = \Omega(s) - G(s) \cdot V_R(s) = G_R(s) \cdot C_R(s)$$

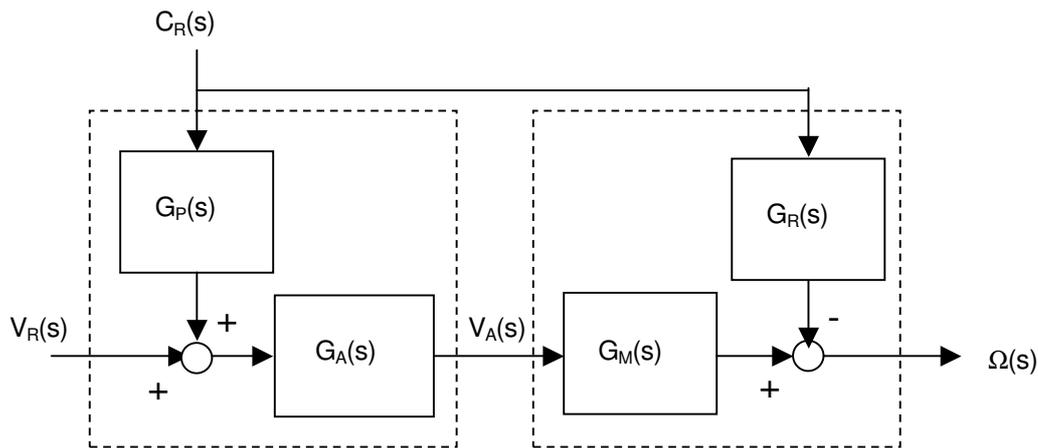
- b) Se la tensione di armatura richiesta per il comando supera un certo limite l'amplificatore di potenza, non è più in grado di generarla a causa di fenomeni di saturazione dello stadio finale di potenza. In tal caso si esce da una condizione di funzionamento lineare, inficiando così tutto il modello lineare del sistema.

1.1.2 Sistemi di controllo a previsione

I sistemi di controllo a previsione, o feed-forward, il controllore agisce in modo da prevenire gli effetti dovuti ai disturbi. Perché l'azione preventiva del controllore sia corretta è necessario che il controllore possa misurare direttamente i disturbi.

Esempio: controllo a previsione di un motore in c.c..

Il seguente schema a blocchi rappresenta un controllo ad azione diretta di un motore in c.c. con compensazione di disturbo:



In questo caso, posto:

$$G(s) = G_A(s) \cdot G_M(s)$$

si ha che

$$\Omega(s) = G(s) \cdot (V_R(s) + G_P(s) \cdot C_R(s)) - G_R(s) \cdot C_R(s)$$

dopo alcuni semplici passaggi matematici si ottiene

$$E(s) = \Omega(s) - G(s) \cdot V_R(s) = (G(s) \cdot G_P(s) - G_R(s)) \cdot C_R(s)$$

Si deduce che si avrebbe una compensazione perfetta dell'errore qualora

$$G_P(s) = \frac{G_R(s)}{G(s)} = \frac{G_R(s)}{G_A(s) \cdot G_M(s)}$$

In realtà questo metodo di controllo presenta alcuni inconvenienti che ne limitano l'applicazione:

- Per effettuare il controllo a previsione è indispensabile che la grandezza o le grandezze di disturbo siano facilmente rilevabili; purtroppo i disturbi spesso sono di difficile misura o addirittura inaccessibili.
- Spesso in un problema di controllo i disturbi sono numerosi portando così ad una eccessiva complicazione del controllore.

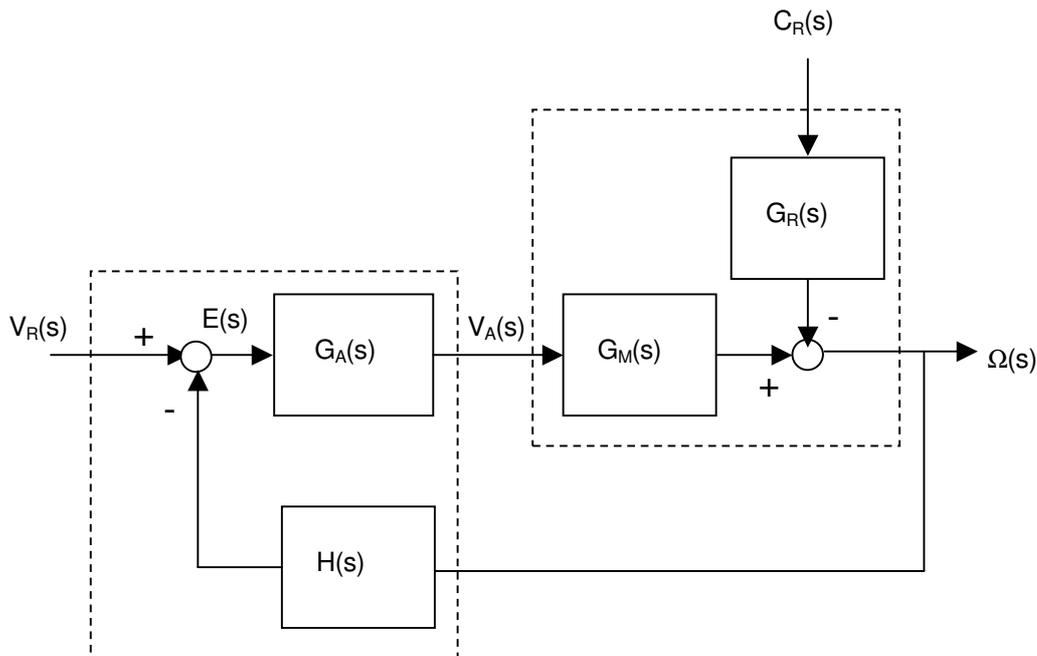
Un esempio di controllo feed-forward si incontra spesso nei sistemi di riscaldamento degli edifici: un trasduttore rileva la temperatura esterna (disturbo) inviando il dato alla centralina di comando dell'impianto di riscaldamento che previene repentine variazioni della temperatura interna anticipando gli effetti della variazione esterna di temperatura.

1.1.3 Sistemi di controllo ad anello chiuso lineari

I sistemi di controllo ad anello chiuso, o a feedback, ed in particolare quelli lineari, intendono eliminare od almeno ridurre gli inconvenienti presentati dai precedenti sistemi di controllo ad anello aperto e a previsione. Riprendiamo l'esempio del controllo in velocità del motore c.c..

Esempio: controllo lineare ad anello chiuso di un motore in c.c..

Il rilevamento della coppia resistente applicata ad un motore elettrico non è una impresa facile, pertanto normalmente si opta per la seguente soluzione ad anello chiuso.



Il blocco H rappresenta la trasduzione della variabile controllata Ω , eventualmente implementata da una dinamo tachimetrica calettata sull'albero motore.

Vediamo come si modifica la relazione di dipendenza di $\Omega(s)$ da $V_R(s)$ e da $C_R(s)$.

Dal precedente schema a blocchi si deducono le seguenti relazioni:

$$\Omega(s) = G(s) \cdot E(s) - G_R(s) \cdot C_R(s)$$

$$E(s) = V_R(s) - H(s) \cdot \Omega(s)$$

Dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene la seguente relazione:

$$\Omega(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \cdot V_R(s) - \frac{G_R(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \cdot C_R(s)$$

Se $|G(s) \cdot H(s)| \gg 1$ la precedente relazione può essere espressa nella seguente forma:

$$\Omega(s) \cong \frac{1}{H(s)} \cdot V_R(s) - G_{R0}(s) \cdot C_R(s)$$

in cui

$$G_{R0}(s) = \frac{G_R(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

Aspetti positivi

Da una analisi si possono notare alcuni aspetti positivi:

- Una maggiore immunità ai disturbi esterni;** il sistema retroazionato è molto meno sensibile ai disturbi esterni, rappresentati in questo caso particolare da $C_R(s)$, in quanto $|G_{R0}(s)| \ll |G_R(s)|$.
- Una maggiore immunità ai disturbi interni;** il legame tra $\Omega(s)$ ed $V_R(s)$ tende ad essere indipendente da eventuali non linearità e variazioni parametriche dell'amplificatore di potenza e del motore stesso, poiché tende ad essere dipendente dalla funzione di trasferimento $H(s)$ del trasduttore.

Si rammenta che tali miglioramenti si possono ottenere se $|G(s) \cdot H(s)| \gg 1$, ovvero avendo a disposizione un elevato guadagno d'anello.

Aspetti negativi

In realtà il controllo in retroazione ha un punto debole, legato proprio al fatto che il guadagno di anello $|G(s)H(s)|$ è molto elevato. Un sistema retroazionato con un guadagno d'anello molto elevato tende ad avere un comportamento transitorio insoddisfacente a causa di eccessive sovraelongazioni ed oscillazioni in risposta a sollecitazioni di ingresso brusche come il segnale a gradino. Tale comportamento può giungere fino ad una vera e propria instabilità.

La causa profonda dell'instabilità nei sistemi dinamici in retroazione risiede nell'inerzia del sistema controllato, ovvero nel ritardo con cui esso risponde ad una eventuale azione correttiva del sistema di controllo.

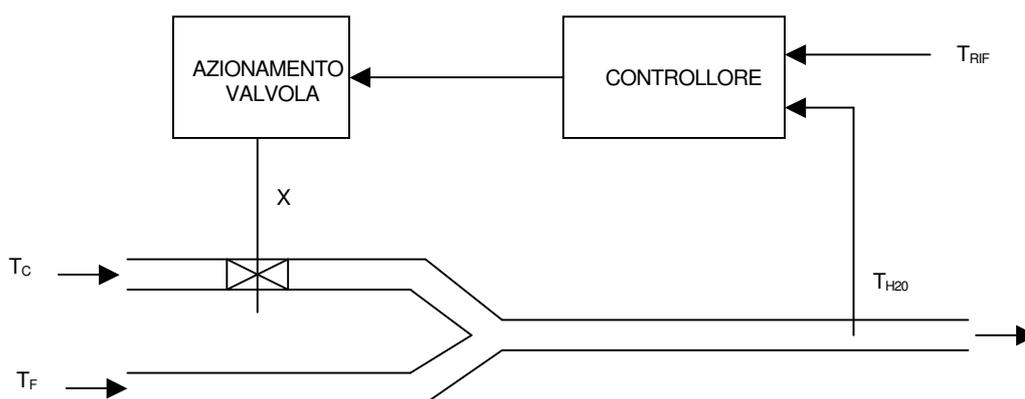
L'inerzia fa sì che l'azione correttiva imposta dalla variabile manipolabile si manifesti per un tempo eccessivo rispetto a quello strettamente necessario per l'annullamento dell'errore (sovracorrezione).

Se poi l'errore causato in senso opposto è superiore all'errore originario si innesca una serie di oscillazioni di ampiezza via via crescenti, ovvero una condizione di instabilità.

Nei sistemi reali le oscillazioni ad un certo punto raggiungeranno i limiti fisici del sistema stesso stabilizzandosi eventualmente in un regime oscillatorio di ampiezza molto elevato, con effetti in alcuni casi catastrofici.

1.1.3.1 Un esempio di sistema instabile

Prendiamo in esame un controllo di temperatura di un fluido per miscelazione.



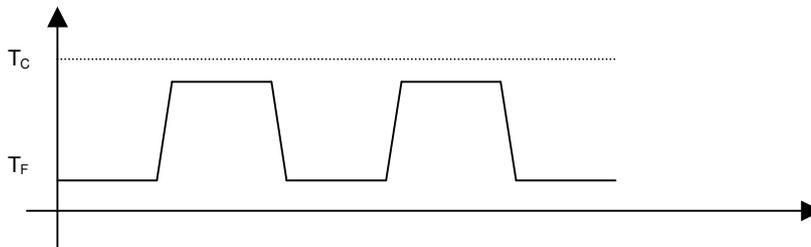
Agendo sulla posizione x dello stelo della valvola (variabile manipolabile) si dosa la portata di acqua calda in modo da regolare la temperatura T_{H20} dell'acqua in uscita dal condotto (variabile controllata).

Si supponga di partire da una condizione in cui l'acqua in uscita sia troppo fredda e la valvola sia completamente chiusa.

Il controllore comanderà l'apertura della valvola, ma, se il guadagno d'anello è troppo elevato l'azione correttiva porterà alla completa apertura della valvola.

Solo dopo un certo tempo (inerzia del sistema controllato) il sensore a valle rileverà un eccessivo innalzamento della temperatura, inducendo in questo modo una forte azione correttiva negativa che porterà alla chiusura completa della valvola.

Questo processo si ripeterà continuamente instaurando così un regime di oscillazioni permanenti della temperatura dell'acqua in uscita.



In questo caso un controllo ad azione diretta, anche se più impreciso, può essere preferibile se non si vogliono correre rischi di instabilità.

I sistemi di controllo ad anello chiuso si suddividono in due grandi categorie, in base all'andamento del segnale di riferimento:

- Regolatori
- Servosistemi

Nei **regolatori** la grandezza controllata deve rimanere costante ad un valore indicato dal segnale di riferimento, che in questo caso prende il nome di *set-point*, indipendentemente dalle condizioni di carico.

Nei **servosistemi** il segnale di riferimento può variare nel tempo e la grandezza controllata deve seguire le sue variazioni. Quando la grandezza controllata è di tipo meccanico si parla più propriamente di *servomeccanismo*. Ne sono un esempio i sistemi di puntamento delle antenne di comunicazione satellitare ed i sistemi di controllo dei movimenti dei robot.

1.1.4 Sistemi di controllo ad anello chiuso ON-OFF

I sistemi di controllo ON-OFF ad anello chiuso, detti anche tutto-niente, meritano una valutazione a parte. Innanzitutto essi rientrano nella casistica dei *sistemi non lineari* a causa della presenza del blocco di controllo che si comporta in modo non lineare. Infatti tra l'ingresso di errore, normalmente analogico, e l'uscita digitale non vi è una relazione lineare, anzi non vi è nemmeno un legame funzionale in senso stretto.

Pertanto essi vengono normalmente studiati con metodologie differenti da quelle intraviste per i sistemi di controllo lineari, di cui uno è il metodo della funzione *descrittiva*.

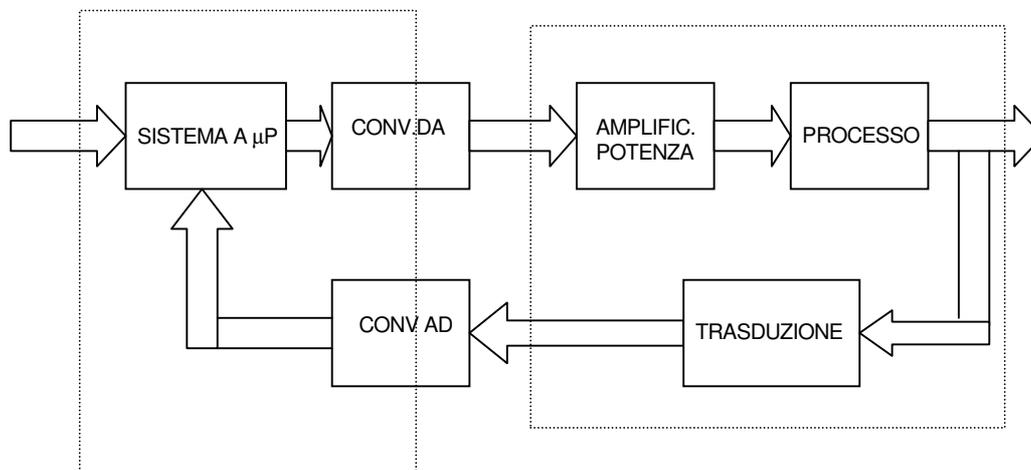
1.1.5 Sistemi di controllo programmati

I sistemi di controllo a microprocessore fanno uso di un elaboratore o di un sistema a microprocessore dedicato per eseguire una serie di operazioni che, per la loro complessità, non possono essere svolte da un sistema analogico cablato.

I sistemi di controllo gestiti da un elaboratore trovano applicazione in tutti quei casi in cui vi sia un elevato numero di variabili da controllare e di calcoli complessi da effettuare: ne sono un esempio il controllo di molti processi di lavorazione industriale, il controllo del traffico aereo, ecc.

I sistemi di controllo con microprocessore dedicato sono utilizzati in applicazioni meno complesse, ma in cui è richiesta una certa flessibilità nell'azione di controllo che traduce nella possibilità di poter programmare il sistema.

Nel seguente schema a blocchi è descritto a grandi linee un sistema di controllo gestito da un microprocessore.



2 I METODI DI ANALISI DEI SISTEMI DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO LINEARI

2.1 Le specifiche dei sistemi di controllo

Un buon sistema di controllo deve dare il valore della grandezza di uscita (variabile controllata) uguale, per quanto possibile, a quello desiderato. E' evidente che in una situazione reale questo non può mai accadere a causa dei disturbi di varia origine, interna od esterna, delle varie ipotesi semplificative effettuate quando si costruisce il modello matematico e comunque a causa dei limiti intrinseci del problema.

Un buon sistema di controllo deve, allora, realisticamente rispondere ad una serie di requisiti, o specifiche:

Errore a regime

Esso è lo scostamento nella fase a regime tra il valore effettivo della grandezza controllata ed il valore desiderato e deve essere ridotto al minimo. Un piccolo errore a regime coincide con una elevata precisione.

L'errore a regime si ricava dall'analisi della risposta nel dominio del tempo .

Velocità di risposta

Con il termine generico velocità di risposta si condensano una serie di parametri della risposta nella fase transitoria (tempo di salita, tempo di ritardo, tempo di assestamento, ecc.) che il sistema di controllo deve soddisfare. Essi sono dati normalmente come valori massimi.

La velocità di risposta si ricava dall'analisi della risposta nel dominio del tempo nel transitorio.

Sovraelongazione

L'ampiezza della sovraelongazione, quando si ha una brusca variazione del segnale di comando o dei disturbi, deve essere limitata ad un valore massimo onde evitare eventuali danni o inutili sollecitazioni.

La sovraelongazione si ricava dall'analisi della risposta nel dominio del tempo nel transitorio.

Stabilità

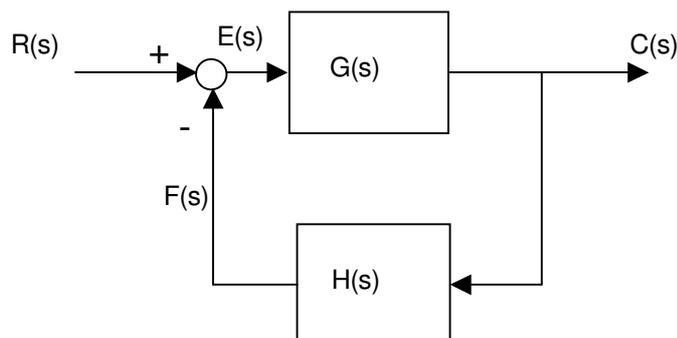
La stabilità viene identificata con due parametri, il margine di guadagno ed il margine di fase, che quantificano quanto il sistema di controllo sia lontano da uno stato di instabilità.

Il margine di fase ed il margine di guadagno si ricavano dall'analisi nel dominio della frequenza.

2.2 La funzione di trasferimento di un sistema di controllo a retroazione

Si è già visto che per effettuare l'analisi di un sistema dinamico è necessario ricavare la funzione di trasferimento del sistema, da cui si può ricavare la risposta ai segnali canonici.

In figura è riportato il tipico schema a blocchi di un sistema di controllo a retroazione.



Dove :

$R(s)$ è la tr. di Laplace della variabile di riferimento

$C(s)$ è la tr. di Laplace della variabile di controllata

$E(s)$ è la tr. di Laplace della variabile di errore

$F(s)$ è la tr. di Laplace della variabile di feedback

$G(s)$ rappresenta la f.d.t. della catena di amplificazione diretta

$H(s)$ rappresenta la f.d.t. della catena di traduzione

La determinazione della funzione di trasferimento è quasi immediata tenendo conto che:

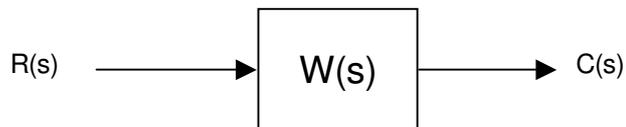
$$C(s) = G(s) \cdot E(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s) \cdot C(s)$$

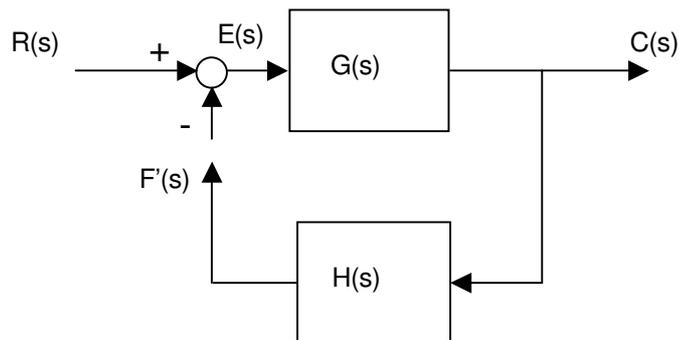
La funzione di trasferimento ad anello chiuso assume la forma :

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

Un sistema a retroazione negativa può essere ridotto ad un unico blocco di funzione di trasferimento $W(s)$.



Si supponga ora ad aprire l'anello di retroazione appena prima del nodo sommatore:



In questo caso $F'(s) = G(s) \cdot H(s) \cdot R(s)$

Il prodotto $G(s)H(s)$ prende il nome di **funzione di trasferimento ad anello aperto**. Essa è di fondamentale importanza per l'analisi e la progettazione dei sistemi di controllo a catena chiusa.

La funzione di trasferimento ad anello aperto può essere espressa nella seguente forma:

$$G(s) \cdot H(s) = k \cdot H_0 \cdot \frac{(1 + s \cdot \tau_1) \cdot (1 + s \cdot \tau_2) \cdot \dots \cdot (1 + s \cdot \tau_n)}{s^q \cdot (1 + s \cdot \tau_1) \cdot (1 + s \cdot \tau_2) \cdot \dots \cdot (1 + s \cdot \tau_{n-q})}$$

posta $G'(s)$ la parte di $G(s)$ priva di poli nell'origine ed $H'(s)$ la parte di $H(s)$ priva di poli nell'origine, la funzione di trasferimento ad anello aperto $G(s) \cdot H(s)$ è pari a

$$G(s) \cdot H(s) = G'(s) \cdot H'(s) \cdot \frac{1}{s^q}$$

k è denominato guadagno statico della amplificazione diretta

H_0 è denominato guadagno statico della retroazione

q è la molteplicità del polo nell'origine.

2.2.1 Tipo di sistema di controllo

La molteplicità q identifica il tipo di sistema di controllo. Il sistema si dice di tipo zero, uno, due, ... se è $q = 0, 1, 2, \dots$

Ciò corrisponde ad una funzione di trasferimento ad anello aperto contenente 0, 1, 2, ... elementi integratori.

I sistemi di tipo zero sono i regolatori, mentre i sistemi di tipo 1 e 2 sono i cosiddetti servosistemi o asservimenti.

Si vedrà più avanti il legame esistente tra l'errore a regime nella risposta a i segnali canonici gradino, rampa e parabola ed il tipo di sistema.

2.2.2 Guadagno statico ad anello aperto

Si può osservare che:

$$k = \lim_{s \rightarrow 0} G'(s)$$

$$H_0 = \lim_{s \rightarrow 0} H'(s)$$

Si definisce guadagno statico d'anello k_{ST} di un sistema retroazionato il valore del limite:

$$k_{ST} = \lim_{s \rightarrow 0} G'(s) \cdot H'(s) = k \cdot H_0$$

Esso è un indice della capacità del sistema di controllo di amplificare il segnale che percorre tutto l'anello. Si può intuire che un sistema di controllo con un guadagno statico elevato tende ad avere una risposta alle variazioni degli ingressi, compresi anche i disturbi, più pronta, ma che nel contempo si espone, in alcuni casi, al rischio dell'instabilità.

2.2.3 Sistemi a retroazione unitaria

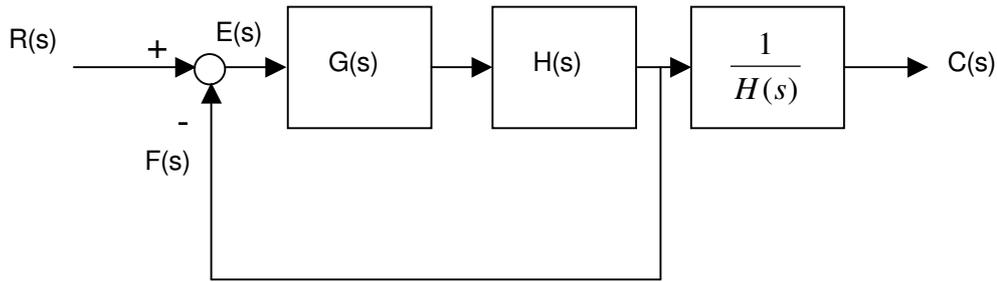
Nei sistemi a retroazione unitaria $H(s) = 1$.

Ciò equivale a ipotizzare una catena di retroazione di tipo statico in cui la grandezza controllata viene trasformata istantaneamente, ovvero con ritardo nullo, con una grandezza di feedback confrontabile con il segnale di riferimento.

Effettivamente ciò accade in molti casi di controllo. Ad esempio, nel controllo di temperatura di una vasca di liquido, viste le costanti tempo in gioco, si può tranquillamente ipotizzare che la risposta del trasduttore ad una variazione di temperatura sia molto più veloce della risposta del sistema "vasca + elementi riscaldanti" ad un comando di innalzamento di temperatura dettato dal controllore.

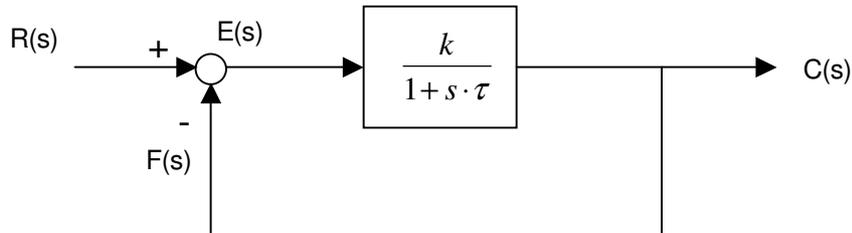
In generale è preferibile ricondurre lo schema di un sistema di retroazione a quello di un sistema a retroazione unitaria perché in tal modo ne risulta più agevole lo studio.

La figura seguente mostra come, mediante alcune trasformazioni d'equivalenza, un generico sistema a retroazione $H(s)$ possa essere ricondotto ad un sistema a retroazione unitaria.



2.3 La risposta nel dominio del tempo dei sistemi retroazionati del 1° ordine

Si consideri il sistema del primo ordine di figura, a retroazione unitaria.



Si sottoponga il sistema ad una sollecitazione a gradino di ampiezza R. La trasformata C(s) della risposta è uguale a:

$$C(s) = \frac{R}{s} \cdot \frac{\frac{k}{k+1}}{1 + s \cdot \frac{\tau}{k+1}} =$$

La risposta $c_R(t)$ nel dominio del tempo del sistema retroazionato è:

$$c_R(t) = R \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\frac{\tau}{k+1}}} \right)$$

Confrontiamola con la risposta c(t) del sistema non retroazionato

$$c(t) = R \cdot k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Si rileva che la controreazione provoca una diminuzione dell'ampiezza della risposta e della costante tempo τ del sistema perché entrambe risultano moltiplicate per il fattore $\frac{1}{k+1} < 1$. Il sistema retroazionato si porta regime in un intervallo di tempo inferiore del sistema non retroazionato, ma l'aumento della velocità avviene a spese dell'ampiezza del segnale d'uscita.

Esempio

2.4 La risposta nel dominio del tempo dei sistemi retroazionati del 2° ordine

2.5 Regolazione PWM di un motore in c.c.

Nella seguente figura è illustrato lo schema di principio di controllo di velocità PWM ad anello chiuso, applicato ad un motore a corrente continua.

Un amplificatore di errore sente la differenza fra una tensione di riferimento V_i e la tensione di reazione V_f generata da una dinamo tachimetrica, e la amplifica generando una tensione di errore V_e . Un comparatore confronta la tensione V_e con una tensione a dente di sega (od eventualmente triangolare) generata da un apposito oscillatore.

L'uscita del comparatore è un'onda rettangolare di periodo costante e pari a quello della tensione a dente di sega, ma con duty cycle dipendente dal valore della tensione di errore V_e . Questa onda rettangolare pilota un elemento attivo (il transistor BJT).

Se, a causa di un aumento della coppia resistente applicata all'albero del motore o per un abbassamento della tensione di alimentazione, diminuisce la velocità angolare del motore, scende anche la tensione di feedback generata dalla dinamo tachimetrica. Cresce, di conseguenza, la tensione V_e di errore e quindi aumenta il duty cycle all'uscita del comparatore.

Si ha come conseguenza finale un aumento della corrente media di armatura e pertanto della coppia motrice che tende così a contrastare la diminuzione iniziale di velocità.

Una reazione inversa si viene a creare se la velocità angolare del motore dovesse indebitamente aumentare.

3 SISTEMI DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO NON LINEARI

3.1 Introduzione

Nello studio dei sistemi di controllo ad anello chiuso lineari la non-linearità è vista come un fenomeno di per sé dannoso, se non altro perché impedisce di applicare ad essi tutti i metodi di analisi e sintesi sviluppati per essi. Tutti questi metodi si fondano sull'ipotesi che tutte le parti costituenti il sistema di controllo si comportano in modo lineare.

Peraltro non sempre la non linearità nei sistemi di controllo va vista come un fenomeno dannoso, necessariamente da evitare.

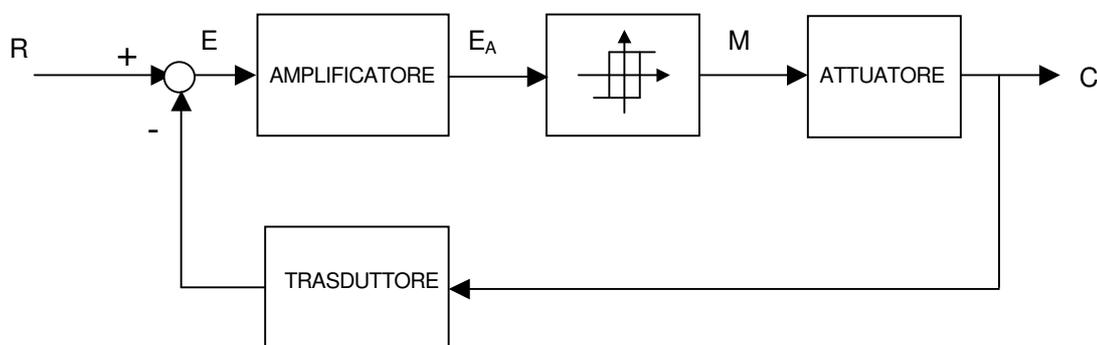
Normalmente si costruiscono sistemi di controllo volutamente non lineari, come i sistemi di controllo ON-OFF, per motivi economici e tecnici.

3.2 Sistemi di controllo ON-OFF

I sistemi di controllo ad anello chiuso ON-OFF sono un caso particolare di sistemi di controllo non lineari. Essi sono usualmente impiegati in molti ambiti civili, come ad esempio il controllo di temperatura di ambienti, di elettrodomestici comuni come il forno da cucina o il ferro da stiro, dove il requisito della precisione della grandezza controllata non è particolarmente stringente.

Il loro studio risulta concettualmente relativamente semplice, se svolto ad un certo livello.

Nello schema a blocchi seguente è rappresentato un sistema di controllo ON-OFF. In un punto della catena di amplificazione diretta è presente un blocco non lineare, all'interno del quale è evidenziata la sua caratteristica ingresso-uscita.



In questo caso il segnale di comando M può assumere solo due valori o stati: attivo (ON) e inattivo (OFF). Per esempio esso potrebbe essere il segnale con cui si attiva la resistenza di riscaldamento di un ferro da stiro.

Vediamo con maggiore dettaglio una tipica caratteristica ingresso-uscita del blocco non-lineare.

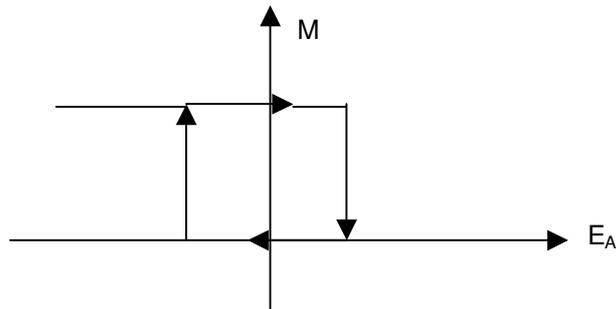
Da essa si può evidenziare che:

- l'uscita può assumere solo due livelli
- è presente un isteresi

L'isteresi è dovuta al fatto che la commutazione dell'uscita avviene su due soglie diverse.

Il limite superiore agisce quando il segnale di errore E_A è positivo e sta crescendo, ovvero quando la grandezza controllata C ha superato il valore imposto dal segnale di riferimento R e sta ancora crescendo.

Il limite inferiore agisce quando il segnale di errore E_A è negativo e sta crescendo in valore assoluto, ovvero quando la grandezza controllata C è scesa sotto il valore imposto dal segnale di riferimento R e sta ancora scendendo.



3.3 Un esempio: controllo di temperatura ON-OFF

L'obiettivo di questo esempio è quello di studiare e sperimentare un controllo di temperatura ON-OFF.

La scelta della temperatura come grandezza fisica da controllare è basata su alcune considerazioni di carattere pratico:

- I processi termici sono generalmente caratterizzati da una dinamica piuttosto lenta, e ciò permette di realizzare sistemi di controllo con prestazioni accettabili anche utilizzando un'elettronica relativamente semplice, nel caso di controllo cablato, o linguaggi ad alto livello nel caso di un controllo programmato.
- Il problema del controllo di temperatura è un problema molto diffuso nel controllo dei processi
- Il fenomeno fisico si presta ad essere modellato con relativa semplicità.

{inserire schema elettrico del controllo di temperatura on

4 LA STABILITA'

4.1 Introduzione

Uno dei requisiti fondamentali di un sistema di controllo è la stabilità, ovvero la capacità del sistema di controllo di raggiungere uno stato di equilibrio dopo la fase di regolazione.

Diamo ora una prima definizione di stabilità, valida per i sistemi nella loro generalità e non solo per i sistemi di controllo:

"Un sistema si dice stabile quando la sua risposta ad un segnale di durata limitata è anch'essa di durata limitata."

La definizione appena data è denominata stabilità BIBO (bounded input - bounded output).

In sostanza, una volta cessato il segnale di ingresso (l'ingresso è diventato nullo) l'uscita deve andare a zero dopo un certo intervallo di tempo.

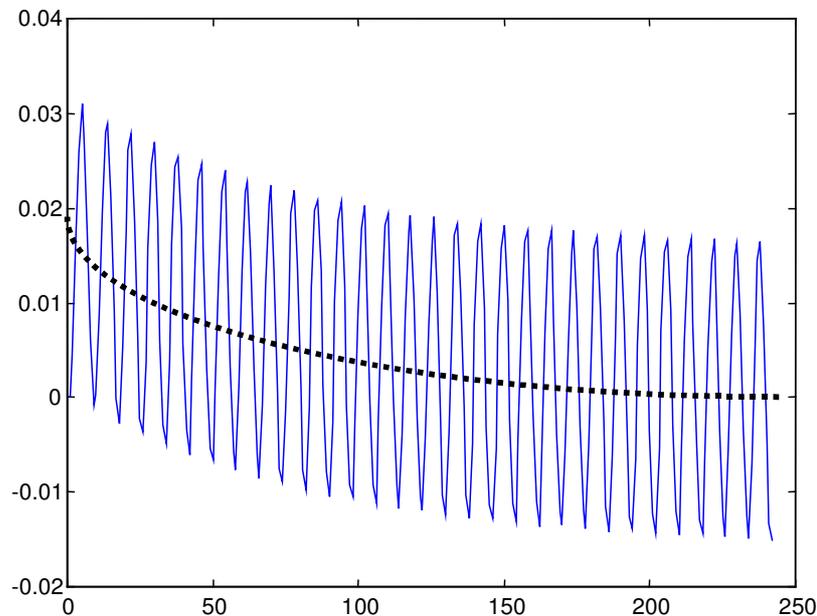
4.2 Criterio generale

La risposta di un sistema, sollecitato in ingresso da un segnale qualsiasi, si compone di una risposta forzata e di una risposta libera.

La risposta forzata è dello stesso tipo del segnale di ingresso (ad esempio se l'ingresso è sinusoidale essa è sinusoidale).

La risposta libera è dovuta alle sole caratteristiche del sistema.

La seguente figura evidenzia la risposta complessiva (linea continua) di un sistema ad un segnale sinusoidale. Si può intuire che la risposta complessiva sia data dalla somma di un segnale sinusoidale e da segnale esponenziale decrescente (linea tratteggiata).



• Figura 1 - Risposta complessiva (linea continua) e risposta libera (linea tratteggiata) di un sistema.

Un sistema è stabile se la sua risposta libera è di tipo transitorio, ossia se tende ad annullarsi dopo un certo tempo.

La risposta libera $r_L(t)$ di un sistema si calcola effettuando l'antitrasformata della funzione di trasferimento $F(s)$ del sistema:

$$r_L(t) = L^{-1}[F(s)]$$

Si dimostra che la antitrasformata $r_L(t)$ è composta da una somma di funzioni di tipo esponenziale e sinusoido-esponenziale.

- $e^{-p \cdot t}$ dove p sono i poli reali della f.d.t.
- $\text{sen}(\omega \cdot t) \cdot e^{-\sigma \cdot t}$ dove $p = \sigma + j\omega$ sono i poli complessi della f.d.t.

Questi contributi tendono ad annullarsi per t crescente se i poli reali p sono negativi ($p < 0$) e se i poli complessi hanno la parte reale negativa ($\sigma < 0$).

Possiamo quindi enunciare il seguente criterio generale di stabilità.

"Un sistema lineare è stabile se tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno la parte reale negativa".

Nel caso di poli reali ciò significa che devono essere negativi. Se un solo polo reale è positivo od un solo polo complesso è a parte reale positiva allora il sistema è instabile; infatti la sua risposta libera contiene una componente crescente che non si annulla più.

4.3 Stabilità dei sistemi ad anello chiuso: il criterio di Bode.

Analizzeremo ora la stabilità nel caso specifico dei sistemi ad anello chiuso, a cui possono essere ricondotti i sistemi di controllo.

Spesso può accadere che un sistema ad anello aperto stabile può diventare instabile nell'inserimento ad anello chiuso: questo è uno dei grossi svantaggi della regolazione ad anello chiuso.

Il criterio generale di stabilità visto in precedenza, proprio per la sua generalità, è applicabile anche nel caso dei sistemi ad anello chiuso. Ma determinare i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

noti i i poli della $G(s)$ e della $H(s)$ è generalmente un'operazione complicata. Si ricorre allora ad altri criteri.

Per analizzare la stabilità di un sistema ad anello chiuso si possono usare diverse metodologie; una di queste è il criterio di Bode.

Il criterio di Bode

Il criterio di Bode fa uso dei diagrammi di Bode del guadagno e della fase della funzione di trasferimento ad anello aperto $G(s) \cdot H(s)$. Questo criterio si può esprimere in due formulazioni equivalenti, ottenibili dopo aver tracciato i diagrammi di Bode della $G(s) \cdot H(s)$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema ad anello chiuso sia stabile è che:

- *la fase della $G(s) \cdot H(s)$, alla pulsazione per cui il guadagno vale 0 dB, sia inferiore a -180°*

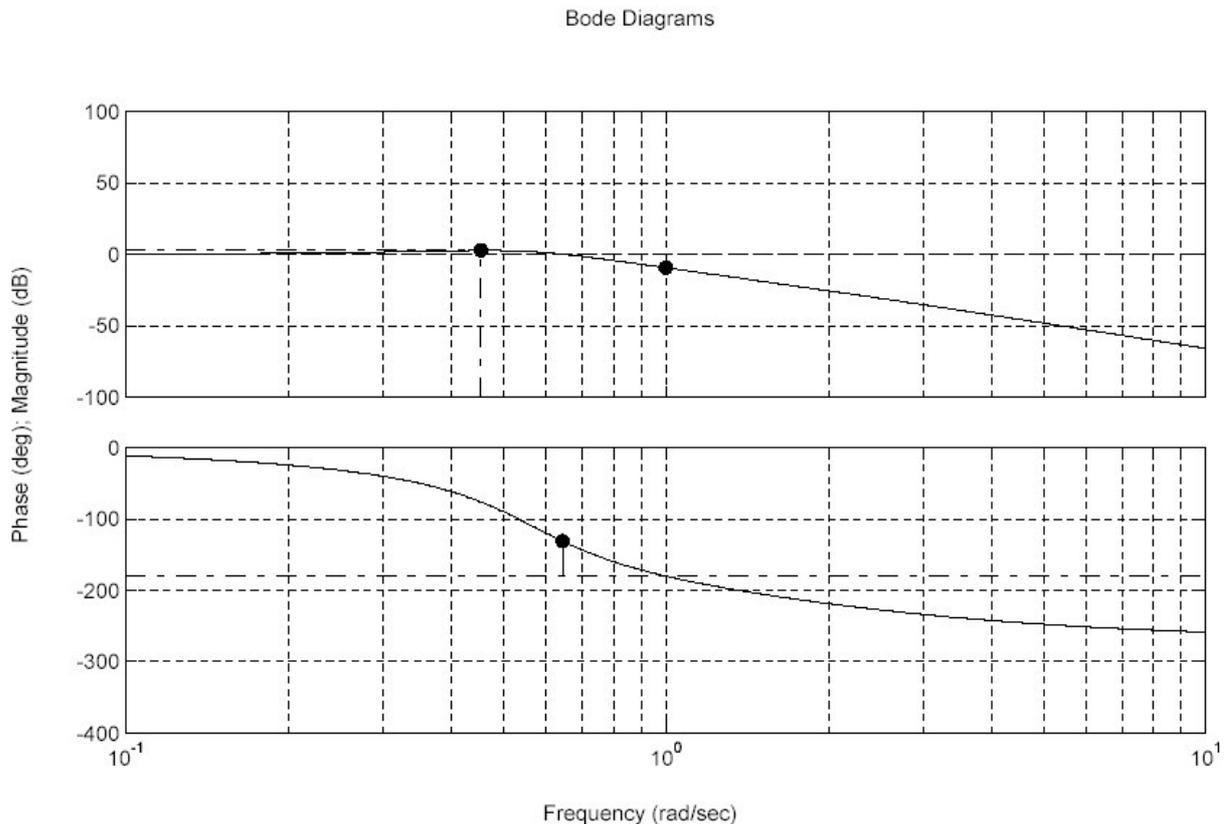
oppure che:

- *il modulo della $G(s) \cdot H(s)$, alla pulsazione per cui la fase vale -180° , sia inferiore a 0 dB.*

La seguente figura illustra i diagrammi di Bode del guadagno e della fase della particolare funzione di trasferimento ad anello aperto

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{0,5}{s^3 + 2 \cdot s^2 + s + 0,5}$$

Applicando il criterio di Bode ad essi si può dedurre che la funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$ è stabile.



• Figura 2 - Criterio di Bode

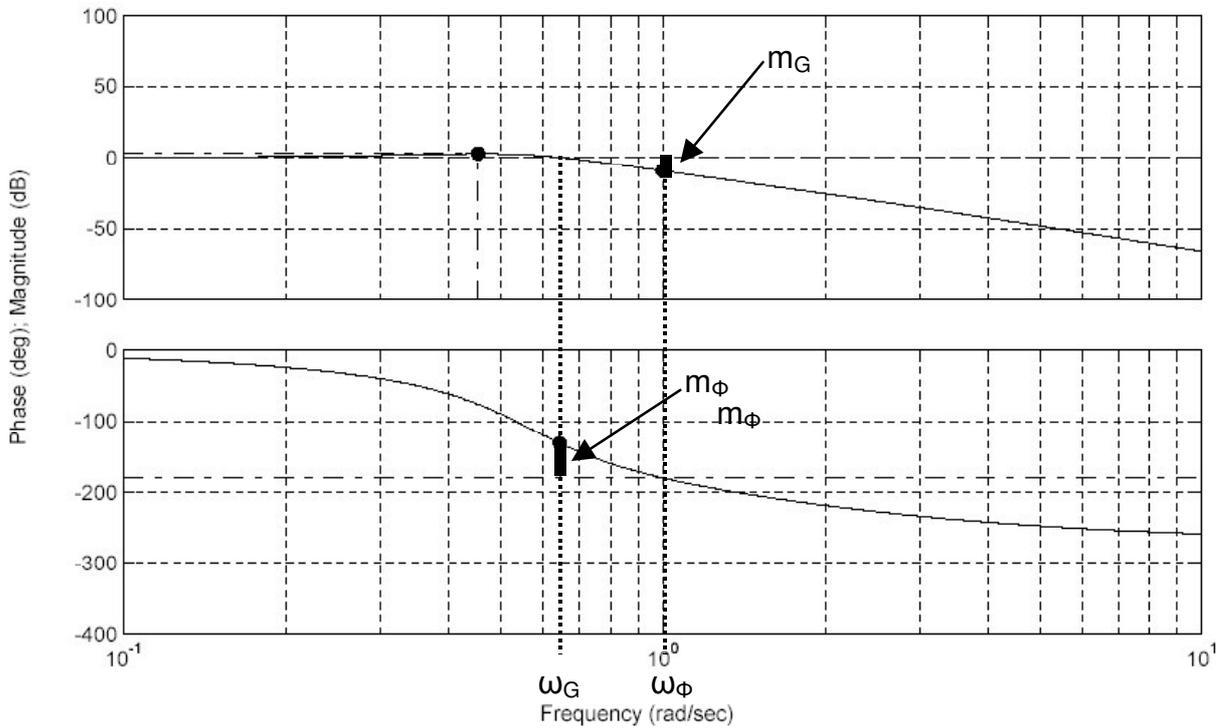
4.3.1 Margine di fase e margine di guadagno

Nelle applicazioni pratiche è necessario valutare oltre alla stabilità teorica di un sistema di controllo, anche i margini di sicurezza per cui si può ragionevolmente ritenere che il sistema rimanga stabile anche quando compaiono disturbi indesiderati e/o variazioni di alcuni dei parametri interni del sistema, per esempio il guadagno statico.

Per questo motivo sono stati introdotti due parametri di qualità che consentono di valutare il grado di stabilità di un sistema ad anello chiuso; essi sono il margine di fase ed il margine di guadagno.

Nella seguente figura sono evidenziati sia il margine di fase m_ϕ che il margine di guadagno m_G relativi alla precedente funzione di trasferimento ad anello aperto.

Bode Diagrams



• Figura 3 - Margine di fase e margine di guadagno

Se indichiamo con ω_G la pulsazione per cui il guadagno è nullo e con ω_ϕ la pulsazione per cui la fase è pari a -180° , da un punto di vista matematico si ha che

$$m_\phi = -180^\circ + \angle G(j\omega_G)H(j\omega_G)$$

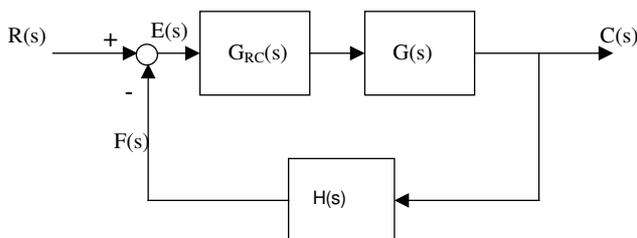
$$m_G = -|G(j\omega_\phi)H(j\omega_\phi)|_{dB}$$

Normalmente si considera sufficiente un margine di fase di 45° ed un margine di guadagno di circa 6 dB.

Un sistema con un margine di fase sufficiente ha anche un margine di guadagno sufficiente, non è invece verificato il contrario.

4.4 Le reti correttici

Per rendere stabili i sistemi di controllo instabili o per migliorare la stabilità di quelli al limite della stabilità si inseriscono delle reti correttici all'interno dell'anello chiuso, normalmente appena dopo il nodo di confronto.



• Figura 4 - Sistema di controllo con rete correttice

Le reti corretrici possono essere:

- a polo dominante
- ritardatrici
- anticipatrici

4.4.1 Reti corretrici a polo dominante

La rete corretrice contiene un polo che introduce una frequenza di taglio molto più bassa rispetto a quella dei poli presenti nella $G(s)H(s)$.

5 ESEMPI

5.1 Esempio 1: controllo di temperatura.

In una industria si ha la necessità di preriscaldare una determinata quantità d'acqua che, immessa in un serbatoio, viene portata alla temperatura di 30°C tramite un sistema di resistenze alimentate da una linea trifase.

L'acqua, dopo essere stata riscaldata, resta nel serbatoio dal quale verrà prelevata integralmente dopo un determinato intervallo di tempo durante il quale un dispositivo di controllo provvede a mantenere l'acqua alla temperatura di regime.

Avendo stimato nell'ordine del 10% le fluttuazioni che si potrebbero avere ad anello aperto a causa della presenza di disturbi additivi nell'intervallo di tempo in cui l'acqua riscaldata permane nel serbatoio, si desidera che il sistema di controllo ad anello chiuso limiti tali disturbi entro il 2%.

Il serbatoio contenente l'acqua può essere assimilato ad un modello la cui funzione di trasferimento presenta una costante di tempo al denominatore ($\tau = 10^4 s$) molto maggiore (di almeno tre decenni) rispetto alle altre del sistema.

Fatte eventuali opportune ipotesi aggiuntive:

- 1) Si disegni uno schema a blocchi di un possibile sistema di controllo
- 2) Si descriva a grandi linee il funzionamento del sistema di controllo
- 3) Si determinino le caratteristiche dei singoli blocchi, motivando le scelte effettuate
- 4) Si verifichi la stabilità del sistema di controllo

5.2 Esempio 2: controllo di velocità di un motore in corrente continua.

Un motore in corrente continua utilizzato in un laminatoio deve mantenere la velocità di regime di n_0 di 4000 rpm. I guadagni statici dei blocchi costituenti il sistema (motore, dinamo tachimetrica e modulo di potenza) valgono rispettivamente $K_m = 12 \text{ rpm/V}$, $K_{dt} = 0,1 \text{ V/rpm}$, $K_{mp} = 20$, mentre le costanti tempo del modulo di potenza e del motore (costanti elettriche e meccaniche) valgono rispettivamente $\tau_{mp} = 1 \text{ ms}$, $\tau_e = 10 \text{ ms}$, $\tau_m = 1 \text{ s}$.

1. Rappresentare il sistema di controllo mediante uno schema a blocchi.
2. Determinare la funzione di trasferimento di ogni blocco, con l'esclusione del regolatore.

Introdurre nel regolatore una azione proporzionale in modo che:

3. La retroazione riduca dal 10% al 0,2% gli effetti prodotti dai disturbi additivi sull'uscita.

Dopo aver introdotto l'azione proporzionale verificare che:

4. Il sistema nel suo complesso risulti stabile.
5. Indicare e descrivere brevemente le tecniche più comuni di correzione della stabilità.