nova Schola Mea
Centro di istruzione e formazione

I circuiti a–dinamici e

i circuiti a regime stazionario

Sommario

1 I circuiti a-dinamici e i circuiti a regime stazionario

Premesso che:

1) Quando in un ***circuito dinamico*** i generatori erogano tensioni e correnti costanti e vogliamo calcolare la soluzione "di regime", ossia vogliamo studiare il circuito lontano da fenomeni transitori che in presenza di elementi dinamici danno luogo ad una dinamica nel funzionamento dello stesso, consideriamo nulle le derivate di corrente e tensione rispetto al tempo (studieremo, infatti, i condensatori come circuiti aperti e gli induttori come corti circuiti). In questa situazione il circuito lo diciamo essere in ***regime stazionario***. In tale regime tutte le grandezze presenti nel circuito sono costanti. Un circuito in regime stazionario è costituito, dunque, unicamente da generatori e da resistori e da corti circuiti e circuiti aperti. Di fatto si sostanzia come un circuito puramente resistivo e come tale va trattato.
2) Un ***circuito a–dinamico*** è costituito da soli generatori e resistori (elementi il cui funzionamento è descritto da equazioni di tipo algebrico). Un tale circuito si definisce anche ***circuito resistivo***. Un circuito resistivo non è detto che abbia tutte le grandezze costanti nel tempo in quanto le grandezze possono variare nel tempo. Un circuito resistivo è un circuito a–dinamico, questo vuol dire che tutte le grandezze presenti in ogni istante dipenderanno dalle altre solo in quello stesso istante. In questo caso trovare la soluzione vorrà dire determinare come le grandezze incognite del circuito dipendono dalle grandezze note dei generatori. Anticipiamo che allorquando tensioni e correnti imposte dai generatori variano nel tempo, le grandezze del circuito "seguono" i forzamenti nel tempo.

In pratica un circuito dinamico a regime stazionario si comporta come un circuito resistivo e dunque, lo studio di un circuito dinamico in regime stazionario si riconduce allo studio di un circuito resistivo. Nello specifico, gli "strumenti" di analisi che introdurremo per i circuiti resistivi ci saranno di aiuto quando, nelle Lezioni 6 e 7, saremo alla ricerca della soluzione di un circuito dinamico a regime stazionario. Ma c'è di più, gli strumenti che acquisiremo in questa lezione saranno utili anche quando tratteremo i circuiti in regime sinusoidale, come vedremo nella Lezione 8.

Quindi studiare i circuiti resistivi è molto importante!

Anticipiamo che nei circuiti resistivi le grandezze si indicano con la lettera maiuscola.

1.1 Il principio di equivalenza

In questo paragrafo vogliamo introdurre un ***principio di equivalenza*** che sottende molti degli strumenti che introdurremo per analizzare circuiti di tipo resistivo e, come vedremo nella Lezione 8, circuiti in regime sinusoidale con il metodo simbolico.
Il ***principio di equivalenza*** che riguarda due bipoli può essere così enunciato:
Due diversi bipoli si dicono equivalenti se hanno la stessa caratteristica.
Ciò detto, possiamo generalizzare il principio di equivalenza ad un sotto-circuito. Consideriamo un generico sotto–circuito$\mathcal{C}$ come quello di Fig. 4.1, che può essere collegato ad un altro sotto-circuito attraverso i morsetti A–B. Tra i morsetti A–B è possibile definire una tensione V ed è anche possibile definire una corrente che chiamiamo I, come abbiamo mostrato in figura. Inoltre, è sempre possibile determinare una relazione funzionale tra V ed I che chiameremo relazione caratteristica del sotto-circuito $\mathcal{C}$. Ovviamente i valori di V ed I dipenderanno da questa relazione caratteristica ma anche dal sotto-circuito che collegheremo ad esso attraverso i morsetti A–B.
Il ***principio di equivalenza*** che riguarda due sotto-circuiti afferma che:
Un sotto-circuito si dice equivalente ad un altro sotto-circuito se i due hanno la stessa relazione caratteristica.

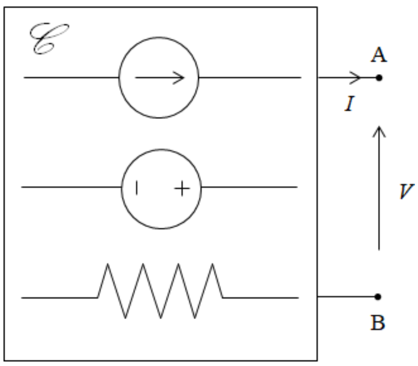


Fig. 4.1 – Sotto-circuito C.

Osserviamo che il principio di equivalenza implica che due sotto-circuiti sono equivalenti se il funzionamento del circuito che utilizza un sotto-circuito e poi l'altro, non cambia.

Grazie al principio di equivalenza enunciato, possiamo affermare che è possibile sostituire un sotto-circuito con un bipolo ad esso equivalente che abbia la stessa relazione caratteristica del sotto-circuito.

Come vedremo nel seguito applicheremo il principio di equivalenza nel § 2 quando studieremo la resistenza serie e parallelo, nel § 7 quando studieremo la trasformazione stella–triangolo, nella Lezione 5 quando studieremo il teorema del generatore equivalente secondo Thevenin e Norton.

2 La resistenza (conduttanza) equivalente

Cominciamo col vedere il concetto di ***resistenza equivalente***.

Consideriamo il circuito di Fig. 4.2. Esso è composto da due sotto-circuiti: $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_R$.

Il sotto-circuito $\mathcal{C}_R$ nella figura a destra dei morsetti A–B è costituito da soli resistori e faremo vedere che, grazie al principio di equivalenza, equivale ad un unico resistore la cui resistenza chiamiamo R_{eq}.

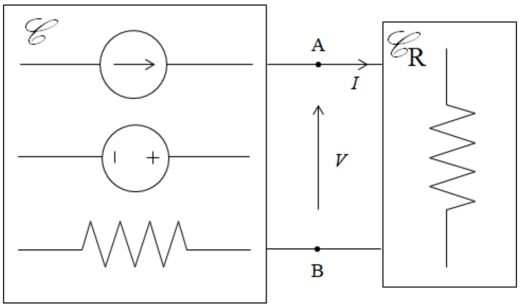


Fig. 4.2 – Circuito nel quale vogliamo calcolare una resistenza equivalente per il circuito $\mathcal{C}_R$.

Sottolineiamo che quando parliamo di resistenza equivalente R_{eq} dobbiamo sempre specificare rispetto a cosa la vogliamo calcolare. Nella Fig. 4.2, ad esempio, vogliamo calcolare la R_{eq} per il sotto-circuito $\mathcal{C}_R$ che si trova a destra della figura. Per il calcolo della resistenza equivalente del sotto-circuito $\mathcal{C}_R$, non abbiamo bisogno di conoscere quello che accade al circuito $\mathcal{C}$, possiamo addirittura rimuoverlo, come in Fig. 4.3, calcolando la R_{eq} vista dai morsetti A–B della figura.

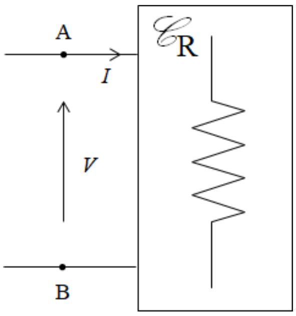


Fig. 4.3 – Sotto-circuito $\mathcal{C}_R$ di Fig. 4.2.

La resistenza R_{eq} può essere allora definita come rapporto tra la tensione *V* e la corrente *I* della Fig. 4.3. Cioè:

$$R_{eq} = \frac{V}{I} \tag{4.1}$$

Il punto è: come calcolare la R_{eq}?

Cominciamo col considerare due casi semplici. Consideriamo due resistenze prima in serie e poi in parallelo.

Come vedremo nell'esercizio 2.3 più avanti, è sufficiente saper risolvere questi due casi per poter calcolare la resistenza equivalente vista da due morsetti di un qualsiasi sotto-circuito resistivo, anche se molto complesso. In quest'ultimo caso si può procedere per riduzioni successive di serie e paralleli fino a giungere ad un'unica resistenza equivalente. Ma come vedremo nel § 7, c'è un caso in cui questo procedimento è costretto ad arrestarsi: quando nel circuito è presente un "triangolo" o una "stella". Vedremo in tale paragrafo come trattare questo caso "anomalo".

Definiamo innanzitutto (l'avevamo anticipato nel § 3 della Lezione 2) cosa sono i bipoli connessi in serie ed in parallelo:

Due bipoli si dicono ***connessi in serie***, o più brevemente si dicono in serie, quando hanno un solo morsetto in comune in esclusiva; in tal caso la corrente di un bipolo entrante nel morsetto in questione è uguale a quella uscente dall'altro bipolo.

Due bipoli si dicono ***connessi in parallelo***, o più brevemente si dicono in parallelo, quando ognuno dei due ha entrambi i morsetti in comune con l'altro; in tal caso i due bipoli hanno la medesima tensione.

Ricordiamo che il concetto di serie e parallelo di bipoli si può estendere a più di due bipoli. Nel senso che si possono considerare più di due bipoli posti in serie e più di due bipoli posti in parallelo.

2.1 La resistenza equivalente serie

Calcoliamo la resistenza equivalente serie dei due resistori in serie della Fig. 4.4.

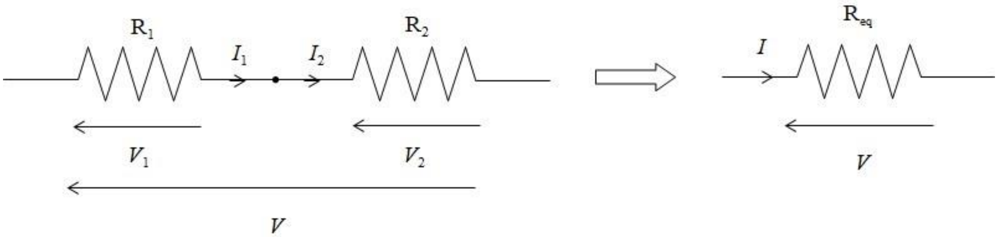


Fig. 4.4 – Resistori in serie e resistenza equivalente.

Utilizziamo le leggi di Kirchhoff:

$$V=V_1+V_2,\ I_1=I_2 \tag{4.2}$$

E le relazioni caratteristiche

$$V_1 = R_1 I_1,\ V_2 = R_2 I_2 \tag{4.3}$$

Ponendo $I_1=I_2=I$, otteniamo dalla prima delle (4.2):

$$V=V_1+V_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1+R_2)\, I = R_{eq}\, I \tag{4.4}$$

dove abbiamo introdotto la resistenza equivalente:

$$R_{eq}= R_1+R_2 \tag{4.5}$$

Osserviamo che, quanto ottenuto per due resistori, è banalmente vero per un qualsivoglia numero N finito di resistori in serie, ottenendo la relazione più generale:

$$R_{eq}=\sum_{i=1}^{N} R_i\ . \tag{4.6}$$

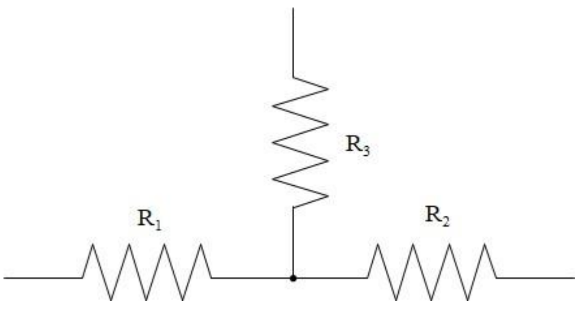


Fig. 4.5 – Resistori NON connessi in serie!

Attenzione a non prendere abbagli! Ad esempio, la Fig. 4.5 mostra due resistenze R_1 e R_2 non in serie in quanto il morsetto in comune ai due resistori NON è esclusivo (ad esso è evidentemente connesso anche il resistore R_3).

2.2 La conduttanza equivalente parallelo

Al fine di calcolare la resistenza equivalente R_{eq} del parallelo di due resistori come in Fig. 4.6, utilizziamo ancora le leggi di Kirchhoff.

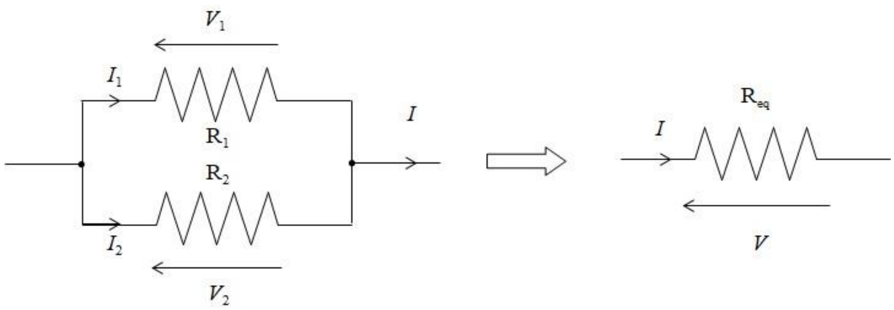


Fig. 4.6 – Resistori in parallelo e resistenza equivalente.

Scriviamo:

$$I=I_1+I_2,\quad V_1=V_2 \tag{4.7}$$

E le relazioni caratteristiche:

$$V_1=R_1I_1,\ V_2=R_2I_2 \tag{4.8}$$

Ponendo $V_1=V_2=V$, otteniamo dalla prima delle (4.7):

$$I=I_1+I_2=\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V=\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)V=\frac{1}{R_{eq}}V \tag{4.9}$$

dove abbiamo introdotto la resistenza equivalente

$$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \tag{4.10}$$

Anche in questo caso osserviamo che quanto ottenuto per due resistori è banalmente vero per un qualsivoglia numero N finito di resistori, ottenendo la relazione più generale:

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}} . \tag{4.11}$$

Nel caso del parallelo, però, risulta comodo calcolare la ***conduttanza equivalente*** anziché la resistenza equivalente. Ricordiamo quanto definito nella (2.6) della lezione 2 per la conduttanza:

$$G = \frac{1}{R} \tag{4.12}$$

Nel caso di un parallelo, dalla (4.11), risulta facilmente che:

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^{N} G_i . \tag{4.13}$$

Possiamo calcolare resistenze equivalenti serie e parallelo anche nel caso di circuiti dinamici.

2.3 Esercizio sul calcolo della resistenza o conduttanza equivalente

Calcoliamo la resistenza equivalente vista dai morsetti A–B e poi la conduttanza vista dai morsetti A’-B’ del circuito considerato in Fig. 4.7.

Per quanto detto nell’introduzione del § 2, la resistenza o conduttanza equivalente dipende dal sotto-circuito al quale ho scelto di riferirmi. Quindi, nell’esempio della Fig. 4.7, a seconda della scelta della coppia di morsetti A–B o A’–B’, otterremo una resistenza o conduttanza equivalente diversa.

Verifichiamo quanto abbiamo affermato.

Nel caso dei morsetti A–B osserviamo che R_4 è in parallelo a R_5 e quindi in serie con R_3 e R_2, il tutto in parallelo a R_1. In calcoli:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \qquad (4.14)$$

$$R_{345} = R_{45} + R_3 \qquad (4.15)$$

$$R_{2345} = R_{345} + R_2 \qquad (4.16)$$

E quindi la resistenza equivalente, chiamiamola R_{eq}, sarà:

$$R_{eq} = \frac{R_{2345} R_1}{R_{2345} + R_1} \qquad (4.17)$$

Nel caso dei morsetti A'- B' vogliamo la conduttanza equivalente. Possiamo calcolare la resistenza e poi la conduttanza. Osserviamo che R_4 è in parallelo a R_5 e quindi in serie con R_1 e R_2, il tutto in parallelo a R_3. In calcoli:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \qquad (4.18)$$

$$R_{145} = R_{45} + R_1 \qquad (4.19)$$

$$R_{1245} = R_{145} + R_2 \qquad (4.20)$$

E quindi la resistenza equivalente, chiamiamola R'_{eq}, sarà:

$$R_{eq} = \frac{R_{1245} R_3}{R_{1245} + R_3} \qquad (4.21)$$

Come possiamo verificare le resistenze equivalenti dei due casi sono diverse!

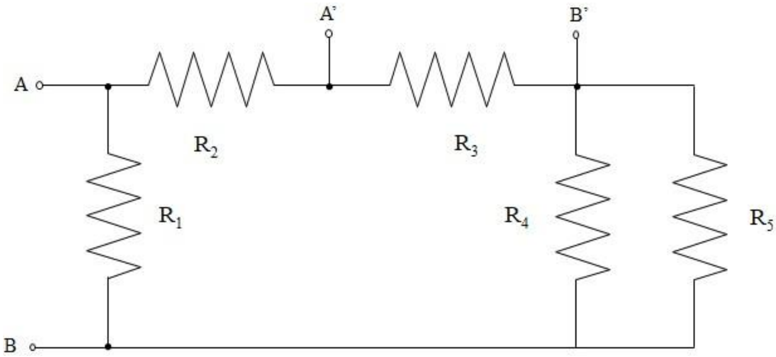


Fig. 4.7 – Esempio di circuito resistivo. Calcolare la resistenza equivalente vista dai morsetti A–B e A'-B'.

Ci ricordiamo di dover calcolare la conduttanza e quindi:

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} \tag{4.22}$$

Ma se vogliamo operare direttamente con le conduttanze: osserviamo che G_4 è in parallelo a G_5 e quindi in serie con G_1 e G_2, il tutto in parallelo a G_3. In calcoli:

$$G_{45} = G_4 + G_5 \tag{4.23}$$

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \tag{4.24}$$

$$G_{1245} = \frac{G_{12} G_{45}}{G_{12} + G_{45}} \tag{4.25}$$

E quindi la conduttanza equivalente, chiamiamola G'_{eq}, sarà:

$$G'_{eq} = G_{1245} + G_3 \tag{4.26}$$

Quale delle due strategie risolutive risulta più efficiente (vedi nota 4 a p. 54), la (4.22) o (4.26)?

Per affrontare correttamente un esercizio del genere conviene considerare tra i morsetti ai capi dei quali si vuole conoscere la resistenza o conduttanza equivalente un ***generatore di caratterizzazione*** (vedi § 1.1). Un siffatto elemento, che potrebbe erogare ad esempio una corrente di 1A o una tensione di 1V, ha il solo ruolo di aiutare a visualizzare correttamente la connessione esistente tra i bipoli del circuito. Poniamo un ***generatore di caratterizzazione*** tra i morsetti A–B del sotto-circuito resistivo passivo $\mathcal{C}_R$ di Fig. 4.3, come abbiamo mostrato in Fig. 4.8. Possiamo alimentare il sotto-circuito con un generatore di tensione o uno di corrente. Possiamo immaginare che tale generatore eroghi una tensione V= 1V (Fig. 4.8 (a)) o una corrente di I=1A (Fig. 4.8 (b)). Nel caso del generatore di tensione (a) la corrente sarà $I=G_{eq}V=G_{eq}$; nel caso del generatore di corrente (b) la tensione sarà $V=R_{eq}I=R_{eq}$. La R_{eq} o la G_{eq} sono quelle che vogliamo determinare grazie al principio di equivalenza e analiticamente sarà possibile determinarle operando serie e paralleli di resistenze equivalenti.

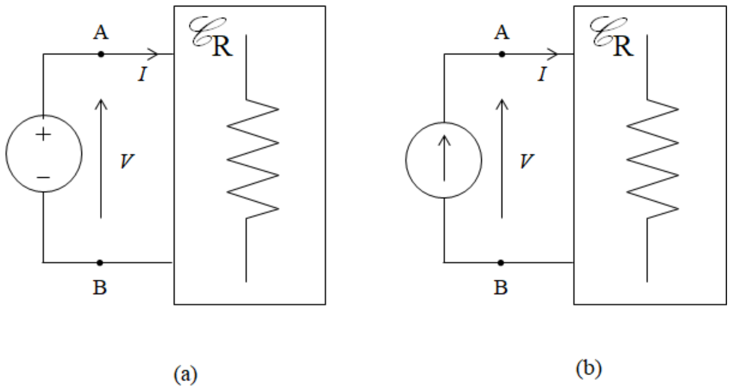


Fig. 4.8 – Il sotto-circuito di Fig. 4.1 alimentato da un generatore di caratterizzazione di tensione (a) e di corrente (b).

3 I partitori di tensione e di corrente

Uno strumento molto utile per il calcolo immediato di una tensione presente su un singolo bipolo di un circuito o di una corrente è il partitore. Per utilizzare questo strumento deve occorrere la seguente condizione:

- conosco una tensione che insiste sulla serie di due bipoli e voglio conoscere le tensioni sui singoli bipoli,
- conosco una corrente che entra nel nodo comune di due bipoli in parallelo e voglio conoscere le correnti sui singoli bipoli.

3.1 Il partitore di tensione

Il ***partitore di tensione*** riguarda due resistenze poste in serie (unico modo per applicare il partitore!).

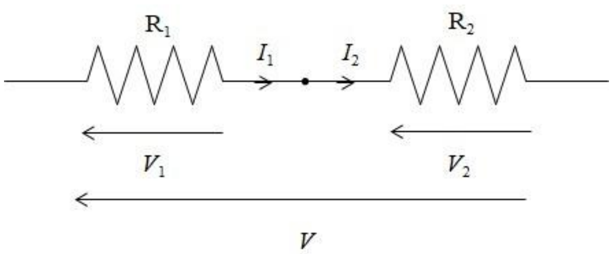


Fig. 4.9 – Resistenze in serie per il partitore di tensione.

Se conosco il valore della tensione presente su due resistenze poste in serie posso, indipendentemente dal valore della corrente, sapere come si ripartisce la tensione sulle due resistenze. Vediamo come. Utilizzando la resistenza equivalente serie, abbiamo

$$V = V_1 + V_2 = \mathrm{R}_1 I + \mathrm{R}_2 I = \mathrm{R}_{eq} I \quad (4.27)$$

$$I = \frac{V}{\mathrm{R}_{eq}} \quad (4.28)$$

Pertanto, si ha:

$$V_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_{eq}} V \text{ e } V_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_{eq}} V \,. \tag{4.29}$$

Abbiamo dunque, individuato una formuletta che ci consente di conoscere il valore della tensione sulla singola resistenza posta in serie ad un'altra.
Attenzione! Il partitore di tensione si può applicare solo nel caso di resistori in serie. Non, ad esempio, per le resistenze R_1 e R_2 di Fig. 4.5.

3.2 Il partitore di corrente

Dualmente al partitore di tensione, il ***partitore di corrente*** riguarda due resistenze poste in parallelo (unico modo per applicare il partitore!).
Se conosco il valore di due resistenze poste in parallelo posso, indipendentemente dal valore della tensione, sapere come si ripartisce la corrente tra le due resistenze.

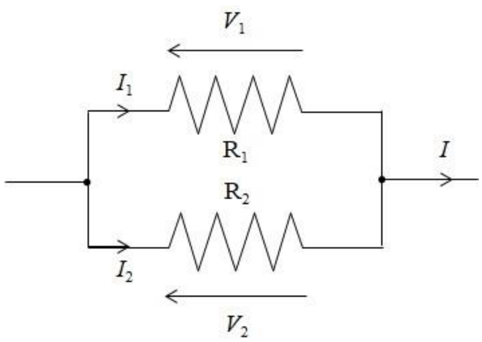


Fig. 4.10 – Resistenze in parallelo per il partitore di corrente.

Utilizzando la resistenza equivalente parallelo

$$V = R_{eq} I \tag{4.30}$$

Dalle relazioni caratteristiche otteniamo banalmente

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_{eq}}{R_1} I = \frac{R_2}{R_1+R_2} I \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_{eq}}{R_2} I = \frac{R_1}{R_1+R_2} I \,. \tag{4.31}$$

Attenzione anche al partitore di corrente. Deve essere usato solo se le resistenze sono in parallelo.

Si osservi che i partitori possono essere usati per sole resistenze anche nei circuiti dinamici e poi, come vedremo nella Lezione 8, nei circuiti a regime sinusoidale con il metodo simbolico.

3.3 Esercizio sui partitori

Cominciamo con il partitore di tensione. Consideriamo il circuito di Fig. 4.11. Vogliamo calcolare la tensione *V*.

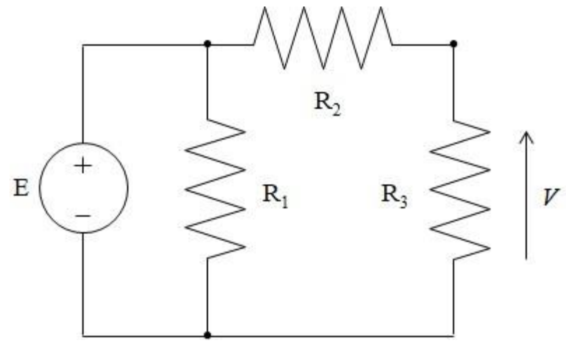


Fig. 4.11 – Esercizio da risolvere con partitore di tensione.

Per il calcolo della tensione *V*, osserviamo che essa è una "parte" della tensione del generatore E. Infatti, il generatore si trova nella maglia a cui afferiscono le resistenze R_2, R_3 (vedi Fig. 4.12) e quindi la tensione E si partiziona su queste due resistenze. Pertanto, possiamo applicare il partitore di tensione:

$$V = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E \,. \tag{4.32}$$

Controllate sempre il segno quando applicate il partitore; in questo caso è positivo perché i versi delle tensioni *V* ed E lungo la maglia orientata sono discordi.

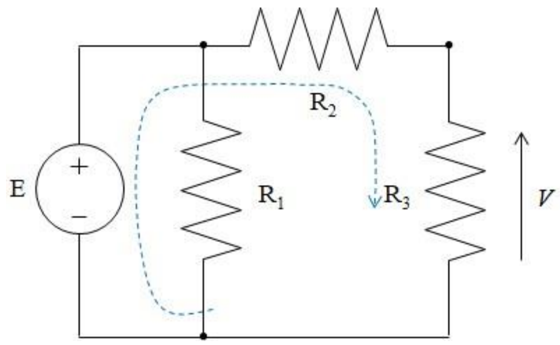


Fig. 4.12 – Esercizio di Fig. 4.11 in cui abbiamo rappresentato una maglia.

Consideriamo ora il caso di un partitore di corrente. Vogliamo calcolare la corrente *I* della Fig. 4.13. Osserviamo che le resistenze R_2 e R_3 sono in serie. Consideriamo quindi la resistenza equivalente serie R_{23}:

$$R_{23} = R_2 + R_3 \tag{4.33}$$

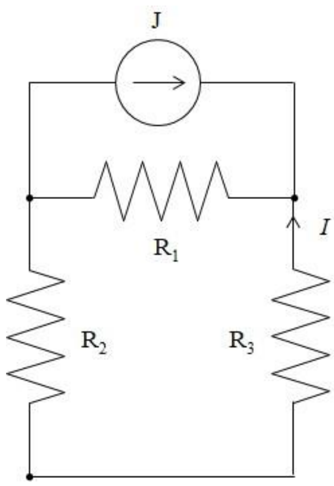


Fig. 4.13 – Esercizio da risolvere con un partitore di corrente.

Facendo riferimento al circuito di Fig. 4.14, dove abbiamo sostituito alla serie di R_2 e R_3 la sua resistenza equivalente, applichiamo il partitore di corrente ottenendo la corrente *I*:

$$I = -\frac{R_1}{R_1 + R_{23}} J \tag{4.34}$$

Si osservi il segno negativo nella (4.34)….. a cosa è dovuto?

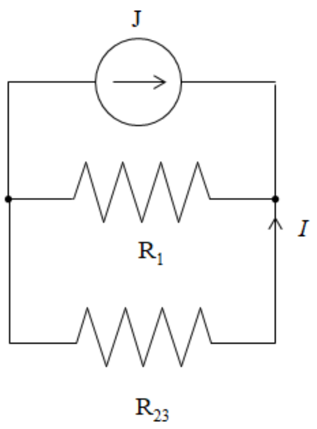


Fig. 4.14 – Circuito equivalente a quello di Fig. 4.13.

4 I circuiti resistivi con un generatore

In questo paragrafo richiamiamo l'attenzione su un circuito semplicissimo… il più semplice: un generatore che alimenta una resistenza. La resistenza considerata può essere una resistenza equivalente come quella calcolata nella (4.17) o nella (4.21). In questo paragrafo la chiameremo semplicemente R. Analizziamo due casi:

1) La resistenza R è alimentata da un generatore ideale di tensione o corrente.
2) La resistenza R è alimentata da un generatore reale di tensione o corrente.

Cominciamo dal primo caso.

Immaginiamo di collegare un generatore di tensione ideale ai morsetti A–B del circuito di Fig. 4.7, realizzando il circuito di Fig. 4.15 dove R è la resistenza equivalente calcolata nel § 2.3, oppure immaginiamo di collegare un generatore di corrente ai morsetti A'–B' del circuito di Fig. 4.7, realizzando il circuito di Fig. 4.16 dove R è la resistenza equivalente calcolata nel § 2.3 .

Cominciamo con il circuito di Fig. 4.15. Per la relazione caratteristica del resistore possiamo scrivere:

$$V = \mathrm{R}\, I \tag{4.35}$$

Essendo V=E, si ha:

$$I = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} \tag{4.36}$$

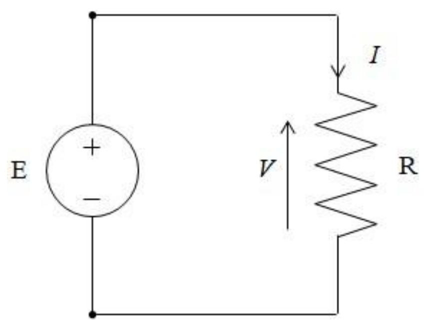


Fig. 4.15 – Resistenza R alimentata da un generatore ideale di tensione.

Per il circuito di Fig. 4.16, essendo I = J, possiamo ottenere:

$$V = \mathrm{R}\,\mathrm{J} \tag{4.37}$$

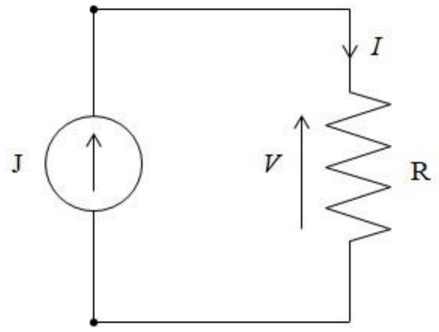


Fig. 4.16 – Resistenza R alimentata da un generatore ideale di corrente.

Complichiamo un poco le cose: consideriamo il circuito generico rappresentato in Fig. 4.17. Come possiamo determinare il valore di *V* ed *I* in questo caso? Possiamo ricorrere ad un sistema di equazioni circuitali nel quale vi siano le relazioni caratteristiche dei generatori reali di tensione o corrente e della resistenza R.

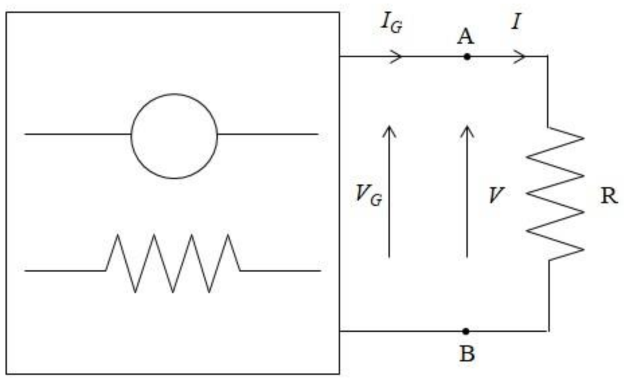


Fig. 4.17 – Resistenza R alimentata da un generatore reale.

Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} I_G = I \\ V_G = V \\ V = \mathrm{R}I \\ f_G(V_G, I_G) = 0 \end{cases} \tag{4.38}$$

dove la prima equazione è la LKC al nodo A, la seconda è la LKT alla maglia, la terza è la relazione caratteristica del resistore R, la quarta è la generica relazione caratteristica del generatore reale di tensione o corrente (vedi la (1.7) della Lezione 1 dove abbiamo tralasciato le derivate). Osserviamo che abbiamo fatto la convenzione del generatore sul bipolo di grandezze VG e IG. Per dare senso alla (4.38), dobbiamo quindi specificare la $f_G(V_G, I_G)$. Ci vengono in aiuto le relazioni caratteristiche dei generatori reali che abbiamo visto nella Lezione 2. Riportiamo qui, nel caso a–dinamico, le relazioni (2.12)[1]:

$$V_G = -R_G I_G + E \tag{4.39}$$

e (2.13):

$$I_G = -\frac{V_G}{R_G} + J \tag{4.40}$$

Il sistema (4.38) può essere semplificato, grazie a delle opportune sostituzioni:

$$\begin{cases} V = RI \\ f_G(V, I) = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

Il sistema (4.41) diventa, nel caso di generatore reale di tensione:

$$\begin{cases} V = RI \\ V = -R_G I + E \end{cases} \tag{4.42}$$

Essendo $V_G = V$ e $I_G = I$.

Dalla (4.42), otteniamo:

$$I = \frac{E}{R + R_G}, \quad V = \frac{R}{R + R_G} E \tag{4.43}$$

Il sistema (4.41) diventa, nel caso di generatore reale di corrente:

[1] Dobbiamo tener presente che, a differenza della relazione (2.12) e (2.13) della Lezione 2, in questo caso abbiamo fatto la convenzione del generatore che dà luogo ad un cambio di segno nelle relazioni (4.39) e (4.40). Inoltre per quanto riguarda la (4.40) teniamo conto del fatto che in questo caso la corrente del generatore J e la corrente I_G le abbiamo considerate con lo stesso verso.

$$\begin{cases} V = \mathrm{R}I \\ I = -\dfrac{V}{\mathrm{R_G}} + \mathrm{J} \end{cases} \tag{4.44}$$

Essendo V_G=V e I_G=I.

Dalla (4.44), otteniamo:

$$I = \frac{\mathrm{R_G}}{\mathrm{R+R_G}}\mathrm{J},\ V = \frac{\mathrm{RR_G}}{\mathrm{R+R_G}}\mathrm{J} \tag{4.45}$$

Vogliamo ottenere le (4.43) e (4.45) lavorando direttamente sui circuiti di Fig. 4.18 e Fig. 4.19: abbiamo collegato un generatore reale di tensione con la resistenza R e poi un generatore reale di corrente con la resistenza R.

Dalla Fig. 4.18, la relazione caratteristica del resistore R è ancora V = R I, ma in questo caso la tensione V non è uguale a quella del generatore ideale E per via della presenza del resistore $\mathrm{R_G}$. Per trovare V dobbiamo utilizzare un partitore di tensione:

$$V = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R+R_G}}\mathrm{E} \tag{4.46}$$

e quindi:

$$I = \frac{1}{\mathrm{R+R_G}}\mathrm{E} \tag{4.47}$$

Le (4.46) e (4.47) sono uguali alla (4.43)! Siamo arrivati alla stessa conclusione utilizzando il sistema di equazioni circuitali e la scorciatoia del partitore di tensione.

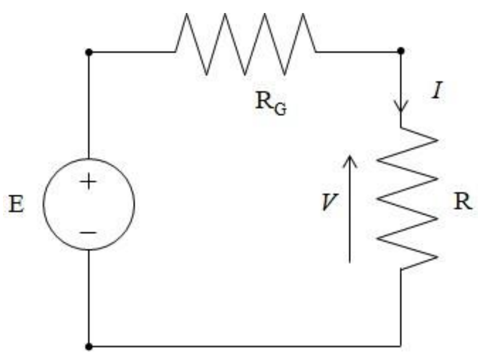


Fig. 4.18 – Resistenza alimentata da un generatore reale di tensione.

Dalla Fig. 4.19, la relazione caratteristica del resistore R è ancora $V = \mathrm{R}\, I$, ma in questo caso la corrente I non è uguale a quella del generatore ideale J per via della presenza del resistore $\mathrm{R_G}$. Per trovare I dobbiamo utilizzare un partitore di corrente:

$$I = \frac{\mathrm{R_G}}{\mathrm{R+R_G}}\mathrm{J} \tag{4.48}$$

e quindi:

$$V = \frac{\mathrm{RR_G}}{\mathrm{R+R_G}}\mathrm{J} \tag{4.49}$$

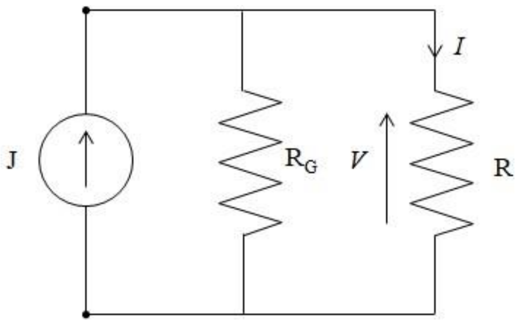


Fig. 4.19 – Resistenza R alimentata da un generatore reale di corrente.

Le (4.48) e (4.49) sono uguali alla (4.45)! Siamo arrivati alla stessa conclusione utilizzando il sistema di equazioni circuitali e la scorciatoia del partitore di corrente.

4.1 Il grafico nel piano *I-V* e punto di lavoro del circuito

Avendo a che fare con circuiti resistivi e quindi con circuiti adinamici ha senso considerare il piano cartesiano I–V e rappresentare graficamente ciò che accade in un circuito adinamico. Vediamo come in tale piano possiamo rappresentare i circuiti di Fig. 4.15 e Fig. 4.16 per i generatori ideali, e Fig. 4.18 e Fig. 4.19 per i generatori reali.
Per il circuito di Fig. 4.15, esaminiamo il grafico di Fig. 4.20. In tale grafico abbiamo considerato la retta relativa al resistore $V = \mathrm{R}\, I$ e quella relativa al generatore di tensione $V = \mathrm{E}$.

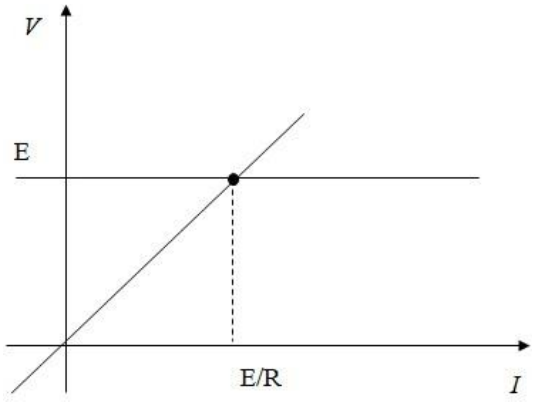


Fig. 4.20 – Grafico e punto di lavoro del circuito di Fig. 4.15.

Nel grafico di Fig. 4.20 il punto d'intersezione delle due rette evidenziato con un punto nero si chiama ***punto di lavoro*** del circuito. Esso rappresenta la coppia di valori *I*, *V* soluzione del circuito.

Per il circuito di Fig. 4.16, esaminiamo il grafico di Fig. 4.21, dove abbiamo considerato la retta relativa al resistore V=RI e la retta relativa al generatore di corrente I = J.

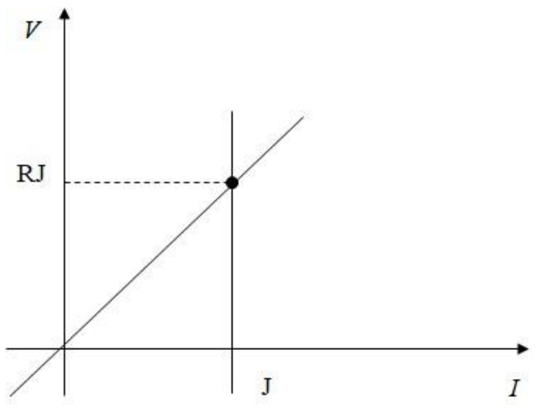


Fig. 4.21 – Grafico e punto di lavoro del circuito di Fig. 4.16.

Nel grafico di Fig. 4.21 il punto d'intersezione delle due rette evidenziato con un punto nero si chiama ***punto di lavoro*** del circuito. Esso rappresenta la coppia di valori *I*, *V* soluzione del circuito.

Passiamo ad esaminare il caso di circuiti con generatori reali.

Per il circuito di Fig. 4.18, esaminiamo il grafico di Fig. 4.22. In tale grafico abbiamo considerato la retta relativa al resistore V = R I e quella relativa al generatore reale di tensione $V = -R_G I + E$.

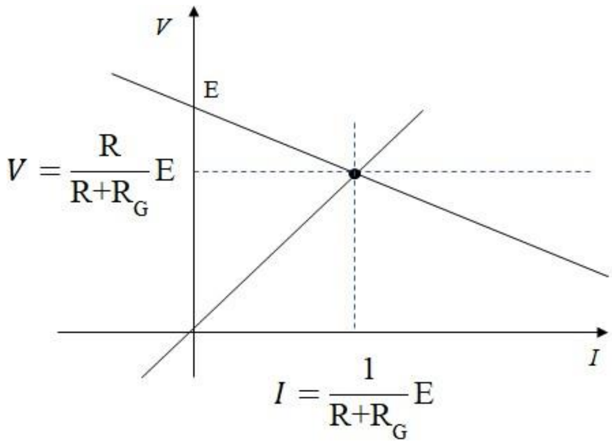


Fig. 4.22 – Grafico e punto di lavoro del circuito di Fig. 4.18.

Nel grafico di Fig. 4.22 il punto d'intersezione delle due rette evidenziato con un punto nero si chiama ***punto di lavoro*** del circuito. Esso rappresenta la coppia di valori I, V soluzione del circuito.

Per il circuito di Fig. 4.19, esaminiamo il grafico di Fig. 4.23, dove abbiamo considerato la retta relativa al resistore V=RI e la retta relativa al generatore reale di corrente $I = -V/R_G + J$.

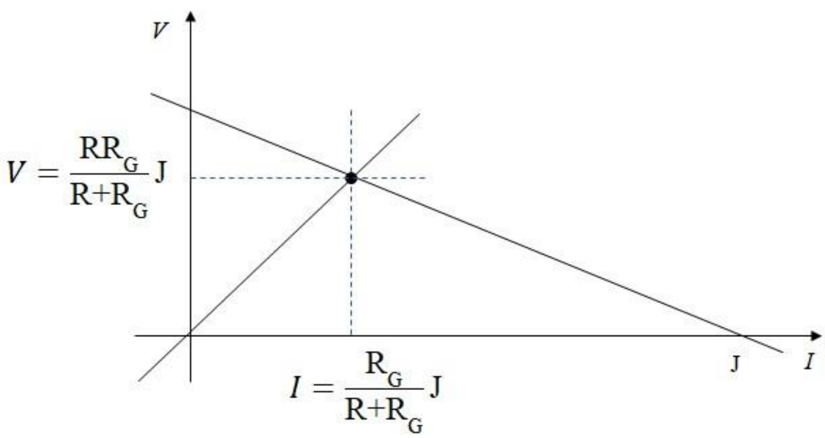


Fig. 4.23 – Grafico e punto di lavoro del circuito di Fig. 4.19.

Nel grafico di Fig. 4.23 il punto d'intersezione delle due rette evidenziato con un punto nero si chiama ***punto di lavoro*** del circuito. Esso rappresenta la coppia di valori *I*, *V* soluzione del circuito.
In tutte e quattro le figure esaminate abbiamo il punto di lavoro del circuito che rappresenta la coppia di valori *V*, *I* a cui "lavora" il circuito.

Osserviamo che, come vedremo meglio nella Lezione 5, i grafici di Fig. 4.22 e Fig. 4.23 sono uguali se $E=R_GJ$.

5 La soluzione di circuiti adinamici - esempi

5.1 I circuiti con un generatore

Vogliamo risolvere un circuito avente un solo generatore. A tal proposito, consideriamo il circuito di Fig. 4.24[2]. Vogliamo determinare I_1 e V_1[3]. I valori delle grandezze presenti nel circuito sono indicati nella figura.
Come risolviamo il problema?

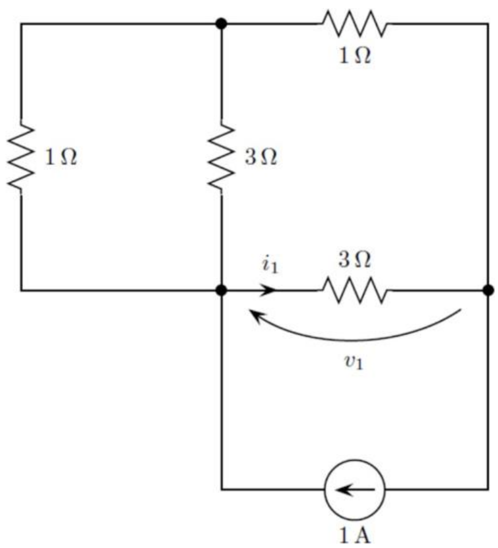


Fig. 4.24 – Esercizio: circuito resistivo con un generatore.

Osserviamo per prima cosa che se riusciamo a calcolare la corrente I_1 otteniamo subito anche la tensione dalla relazione caratteristica:

$$V_1 = 3I_1 \tag{4.50}$$

Per calcolare la I_1, osserviamo dalla Fig. 4.24, che in parallelo alla resistenza su cui bisogna calcolare la corrente I_1, abbiamo due resistenze in parallelo con una in serie. Possiamo calcolare la resistenza equivalente:

---

[2] Questo circuito e la sua soluzione è stata ricavata dal sito https://autocircuits.org/autocir_home.html realizzato dal prof. Stefano Grivet-Talocia, Politecnico di Torino.

[3] Si osservi che le figure mostrate utilizzano simboli con caratteri minuscoli per la tensione e corrente.

$$R_{eq} = \left(\frac{3}{1+3} + 1 \right) \Omega = \frac{7}{4} \Omega \tag{4.51}$$

A questo punto possiamo considerare il circuito di Fig. 4.25 e utilizzare un partitore di corrente. Si ha:

$$I_1 = \frac{7}{19} \tag{4.52}$$

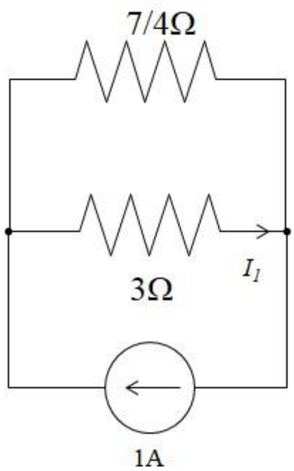


Fig. 4.25 – Circuito di Fig. 4.24 semplificato.

Da cui:

$$V_1 = \frac{21}{19} \tag{4.53}$$

5.2 I circuiti con più generatori

5.2.1 Il principio di sovrapposizione degli effetti

Nel § 4.1.5 della Lezione 1, abbiamo introdotto il principio di sovrapposizione degli effetti che può essere utilizzato quando il circuito è lineare, quando cioè è costituito da soli elementi lineari. Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma che se in un circuito vi sono più generatori, tutte le tensioni e le correnti del circuito sono ottenibili come somma, o "sovrapposizione", delle tensioni e delle correnti che si possono osservare in relazione ad ogni singolo generatore.

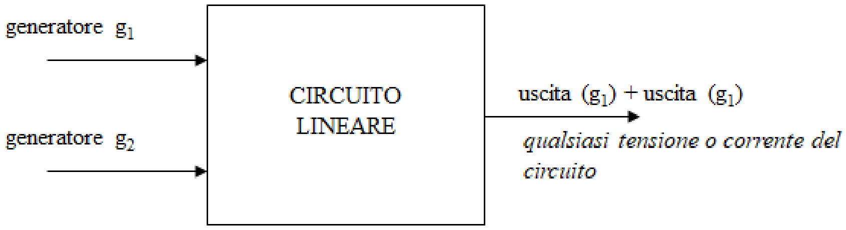


Fig. 4.26 – Circuito lineare come un sistema ingresso-uscita avente come forzamento due generatori.

Nella Fig. 4.26 abbiamo modellato il circuito con un sistema ingresso-uscita[4]. In ingresso abbiamo considerato due generatori, e in uscita abbiamo considerato la somma delle risposte ai singoli generatori. Analiticamente possiamo scrivere:

$$x(t) = f\left(g_1(t) + g_2(t)\right) = x_1(t) + x_2(t) \tag{4.54}$$

Pertanto, per ottenere $x(t)$ sarà necessario calcolare $x_1(t)$ e poi $x_2(t)$.

Si tenga presente che se nel circuito da risolvere ci fossero più di due generatori, quanto detto per il caso di due si generalizza a un numero >2.

Nel prossimo paragrafo considereremo un esempio pratico.

5.2.2 Esercizio

Consideriamo il circuito di Fig. 4.27 che abbiamo ottenuto da quello di Fig. 4.7 mettendo rispettivamente ai morsetti A–B un generatore ideale di tensione e ai morsetti A'-B' un generatore ideale di corrente.

---

[4] Per un approccio sistemico ai circuiti si veda il § 3.1 della Lezione 6.

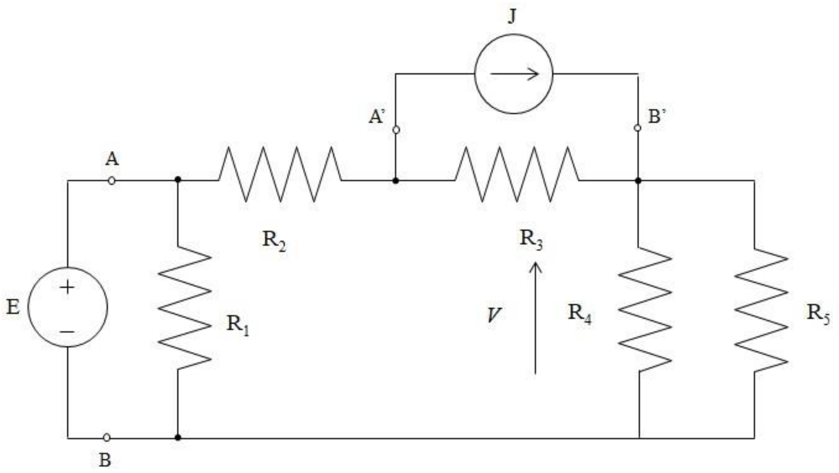


Fig. 4.27 – Esercizio con la sovrapposizione degli effetti.

Vogliamo calcolare la tensione *V* sul resistore R_4 utilizzando la sovrapposizione degli effetti e poi i partitori di corrente e tensione.
Per prima cosa osserviamo che la tensione *V* è la tensione del resistore equivalente al parallelo di R_4 e R_5, pertanto ci conviene considerare la resistenza equivalente:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \tag{4.55}$$

Come abbiamo fatto in Fig. 4.28.

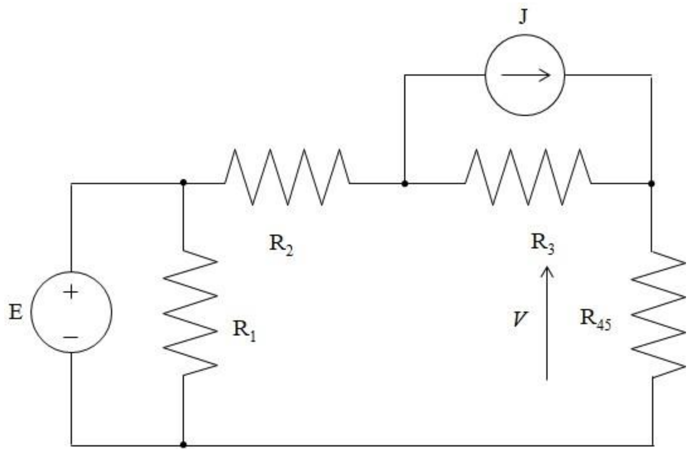


Fig. 4.28 – Circuito semplificato di Fig. 4.27.

Il circuito è lineare, quindi possiamo utilizzare la sovrapposizione degli effetti. Calcoliamo la tensione V come sovrapposizione di due contributi dovuti rispettivamente ai generatori E e J:

$$V = V_E + V_J \tag{4.56}$$

Cominciamo con il calcolo di V_E. Dobbiamo spegnere il generatore di corrente come abbiamo fatto nel cosiddetto ***circuito ausiliario*** di Fig. 4.12 e quindi considerare un circuito aperto al posto del generatore J. La tensione V_E è una “parte” della tensione del generatore E. Infatti, il generatore si trova nella maglia a cui afferiscono le resistenze R_2, R_3, e R_{45} e quindi la tensione E si partiziona su queste tre resistenze (vedi Fig. 4.30). Pertanto, possiamo applicare il partitore di tensione:

$$V_E = \frac{R_{45}}{R_2 + R_3 + R_{45}} E \tag{4.57}$$

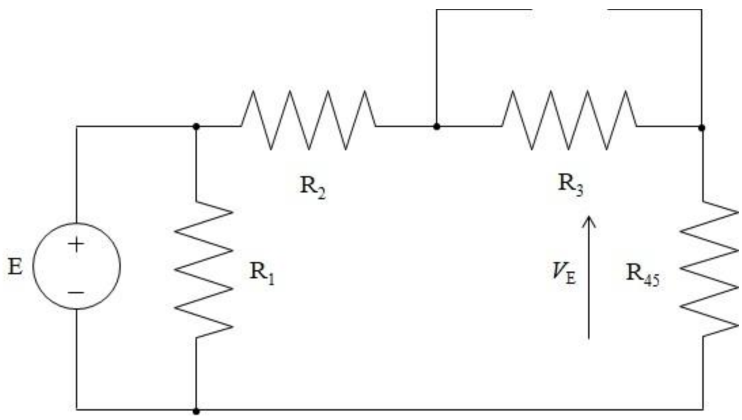


Fig. 4.29 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 4.27 quando si è spento il generatore di corrente.

Controllate sempre il segno quando applicate il partitore; in questo caso è positivo perché i versi delle tensioni V_E ed E sono discordi lungo il percorso della maglia.

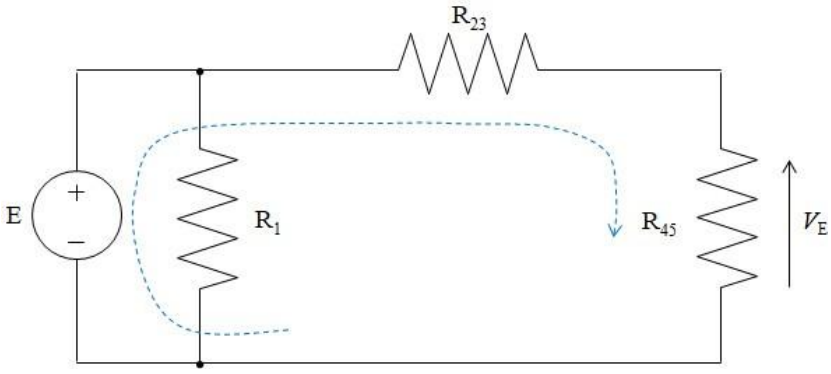


Fig. 4.30 – Circuito di Fig. 4.29 semplificato a cui abbiamo messo in evidenza una maglia.

Spegniamo ora il generatore di tensione sostituendogli un corto circuito come abbiamo fatto nel circuito ausiliare di Fig. 4.31, per calcolare il contributo V_J. Osserviamo che la resistenza R_{45} questa volta si trova, rispetto al generatore di corrente J, in serie alla resistenza R_2 (essendo cortocircuitata[5] la R_1 – vedi Fig. 4.32) e la loro serie è in parallelo alla R_3.

Facendo riferimento alla (4.31), possiamo applicare il partitore di corrente tra R_3 e (R_2+ R_{45}) e calcolare la corrente del resistore R_{45} diciamola I_J:

$$I_J = \frac{R_3}{R_3 + R_2 + R_{45}} J \tag{4.58}$$

Ci domandiamo: quale sarà il verso di I_J calcolato con la (4.58)?

[5] Il resistore R_1 è “cortocircuitato” in quanto viene a trovarsi in parallelo con un corto circuito. Per quanto studiato in precedenza, i due bipoli in parallelo devono avere la stessa tensione e tale tensione non può che essere quella nulla imposta dalla caratteristica del bipolo corto circuito, ossia il bipolo equivalente al parallelo sarà proprio un corto circuito.

Si osservi che allorquando avevamo spento il generatore di corrente (Fig. 4.29), invece, il resistore R_3 era venuto a trovarsi in parallelo ad un circuito aperto dovendo assumere entrambi la stessa tensione. Tale circuito aperto ha la caratteristica di avere corrente nulla per qualsiasi valore di tensione ai suoi capi per cui, in questo caso, il bipolo che determina la tensione ai capi del parallelo è il resistore R_3.
In maniera duale rispetto al caso di resistore in parallelo con un corto circuito si provi a riflettere su cosa accade allorquando un resistore viene a trovarsi in serie con un circuito aperto.

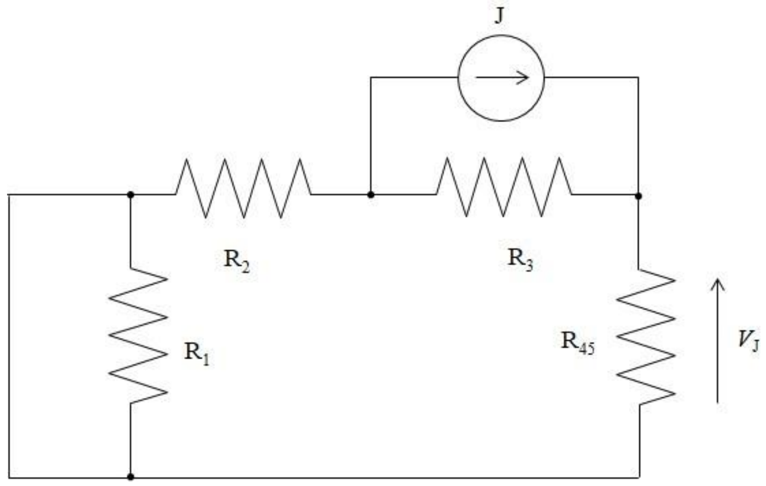


Fig. 4.31 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 4.27 a cui abbiamo spento il generatore di tensione.

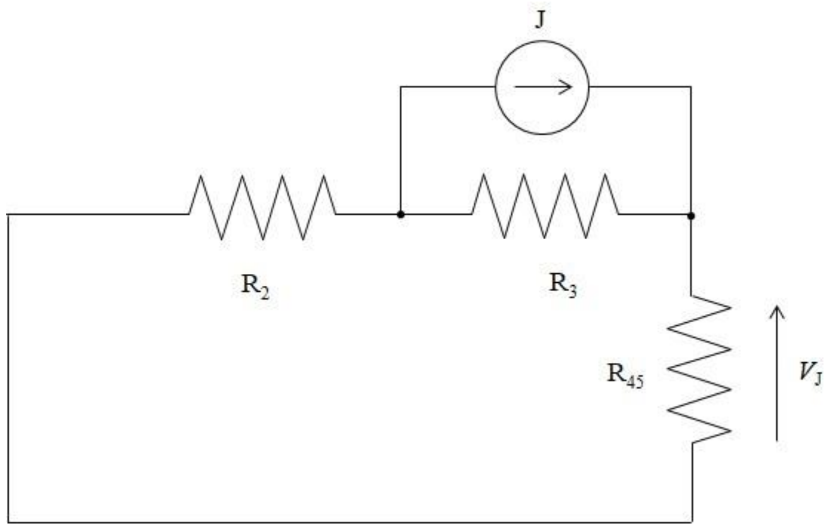


Fig. 4.32 – Circuito di Fig. 4.31 semplificato.

Calcoliamo, infine, la tensione V_J utilizzando la relazione caratteristica del resistore R_{45} e la I_J ricavata nella (4.58):

$$V_J = R_{45} I_J = \frac{R_{45} R_3}{R_2 + R_3 + R_{45}} J \tag{4.59}$$

Dalle (4.57) e dalle (4.59) otteniamo:

$$V = V_E + V_J = \frac{R_{45}}{R_2 + R_3 + R_{45}} E + \frac{R_{45} R_3}{R_2 + R_3 + R_{45}} J \tag{4.60}$$

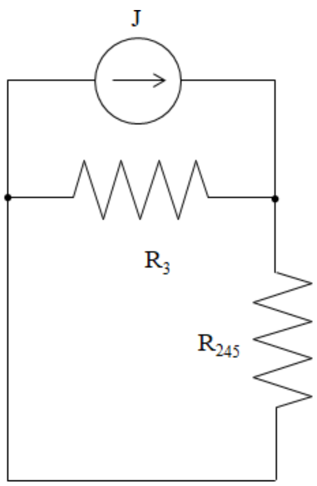


Fig. 4.33 – Circuito di Fig. 4.32 in cui abbiamo sostituito una resistenza serie equivalente.

5.3 Un circuito risolto con il metodo dei potenziali di nodo

Supponiamo di dover risolvere il circuito di Fig. 4.34.

DATI: R_1= 0,5 Ω, R_2=0,5 Ω, R_3=2 Ω, R_4=2 Ω, J=4 A.

Dobbiamo calcolare tutte le correnti e tensioni dei bipoli. Osserviamo che $n-1=2$ e $l-(n-1)=3$. Possiamo utilizzare convenientemente il metodo dei potenziali di nodo. In questo caso scriveremo $n-1$ equazioni (quelle ai nodi) invece di $l-(n-1)$ (quelle alle maglie). Vediamo come:

Introduciamo i potenziali ϕ_I, ϕ_{II} ed ϕ_{III} ai tre nodi del circuito. Fissiamo a zero il potenziale $\phi_{III}=0$ e scartiamo il nodo III nella scrittura delle LKC. Scriviamo le due LKC rispettivamente al nodo I e al nodo II:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ -I_3 - J - I_5 = 0 \end{cases} \tag{4.61}$$

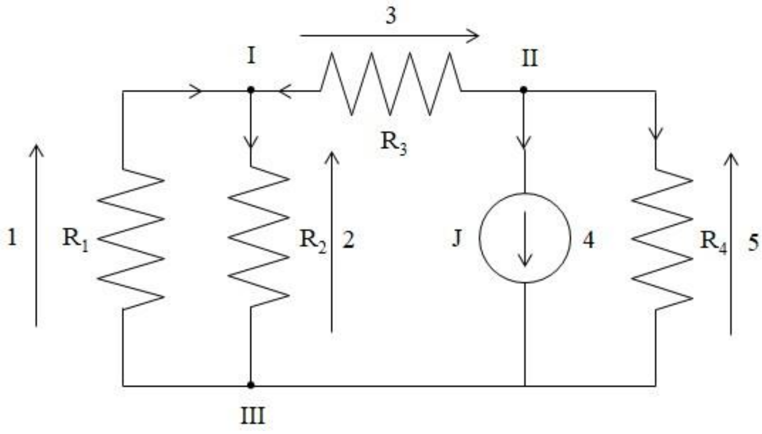


Fig. 4.34 – Esercizio da risolvere con il metodo dei potenziali di nodo.

Nel sistema (4.61) abbiamo considerato positive le correnti entranti nel nodo e negative quelle uscenti. Inoltre, abbiamo posto I_4=J. Come si può notare il sistema (4.61) non porta ad una soluzione in quanto ha un numero di equazioni inferiore alle incognite. Ma noi abbiamo introdotto i potenziali di nodo che diventeranno le nuove incognite del sistema. Avendo posto $\phi_{III}=0$ ne saranno solo due. Ora esprimiamo le correnti in funzione dei potenziali di nodo:

$$\begin{cases} I_1 = -\dfrac{\phi_I}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{\phi_I}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{\phi_{II} - \phi_I}{R_3} \\ I_5 = \dfrac{\phi_{II}}{R_4} \end{cases} \tag{4.62}$$

Si osservi come, nel sistema (4.62), la corrente I_1 è pari all'opposto di ϕ_I/R_1. Perché?
Sostituiamo le correnti (4.62) nelle (4.61) e otteniamo:

$$\begin{cases} -\dfrac{\phi_I}{R_1} - \dfrac{\phi_I}{R_2} + \dfrac{(\phi_{II} - \phi_I)}{R_3} = 0 \\ -\dfrac{(\phi_{II} - \phi_I)}{R_3} - J - \dfrac{\phi_{II}}{R_4} = 0 \end{cases} \tag{4.63}$$

Il sistema (4.63) è un sistema di due equazioni in due incognite! La soluzione sarà:

$$\phi_{I} = -\frac{8}{17}\,\mathrm{V}\,,\ \phi_{II} = -\frac{72}{17}\,\mathrm{V} \qquad (4.64)$$

Che sostituito nel sistema ci conduce al valore delle correnti:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{16}{17}\,\mathrm{A} \\ I_2 = -\frac{16}{17}\,\mathrm{A} \\ I_3 = -\frac{32}{17}\,\mathrm{A} \\ I_4 = 4\mathrm{A} \\ I_5 = -\frac{36}{17}\,\mathrm{A} \end{cases} \qquad (4.65)$$

E poi al valore delle tensioni, grazie alle relazioni caratteristiche:

$$\begin{cases} V_1 = -\mathrm{R}_1 I_1 = -\frac{8}{17}\,\mathrm{V} \\ V_2 = \mathrm{R}_2 I_2 = -\frac{8}{17}\,\mathrm{V} \\ V_3 = \mathrm{R}_3 I_3 = -\frac{64}{17}\,\mathrm{V} \\ V_4 = \mathrm{R}_4 I_5 = -\frac{72}{17}\,\mathrm{V} \\ V_5 = \mathrm{R}_4 I_5 = -\frac{72}{17}\,\mathrm{V} \end{cases} \qquad (4.66)$$

Si osservi nella prima delle (4.66) che la relazione caratteristica del resistore R_1 ha un segno meno dovuto alla convenzione del generatore fatta sul resistore.

5.4 Un circuito risolto con il metodo delle correnti di maglia

Supponiamo di dover risolvere il circuito di Fig. 4.35.

DATI: R_1= 0,5Ω, R_2=0,5Ω, R_3=0,25Ω, R_4=0,25Ω, E=3V.

Dobbiamo calcolare tutte le correnti e tensioni di lato. Osserviamo che $n-1=3$ e $l-(n-1)=2$. Possiamo utilizzare convenientemente il metodo delle correnti di maglia. In questo caso scriveremo $l-(n-1)$ (quelle alle maglie) invece di $n-1$ equazioni (quelle ai nodi).

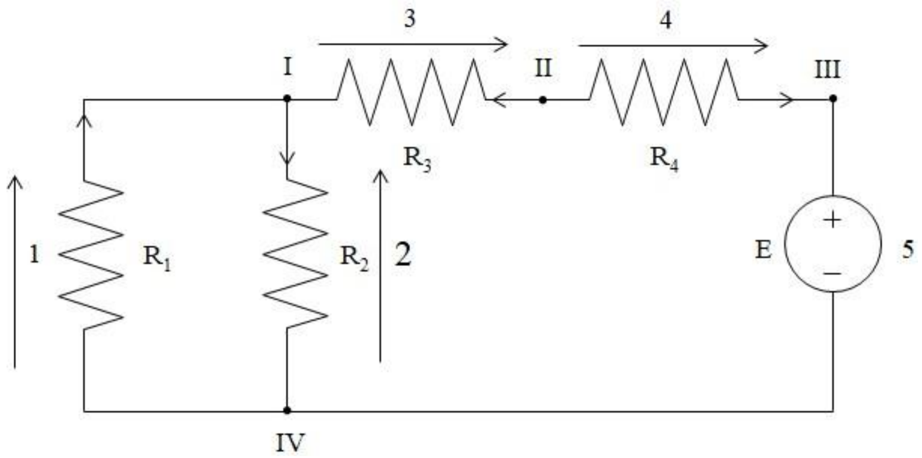


Fig. 4.35 – Esercizio da risolvere con il metodo delle correnti di maglia.

Scegliamo due maglie del circuito e introduciamo le correnti di maglia come, ad esempio, abbiamo mostrato in Fig. 4.36: J_1 e J_2. Scriviamo le due LKT rispettivamente alle due maglie di Fig. 4.36:

$$\begin{cases} V_1 - V_2 = 0 \\ V_2 + V_3 + V_4 - \mathrm{E} = 0 \end{cases} \tag{4.67}$$

Nel sistema (4.67) abbiamo considerato positive le tensioni concordi con il verso di percorrenza della maglia e negative quelle discordi. Inoltre, abbiamo posto $V_5=\mathrm{E}$. Come si può notare il sistema (4.67) non porta ad una soluzione in quanto ha un numero di equazioni inferiore al numero delle incognite. Ma noi abbiamo introdotto le correnti di maglia che diventeranno le nuove incognite del sistema.

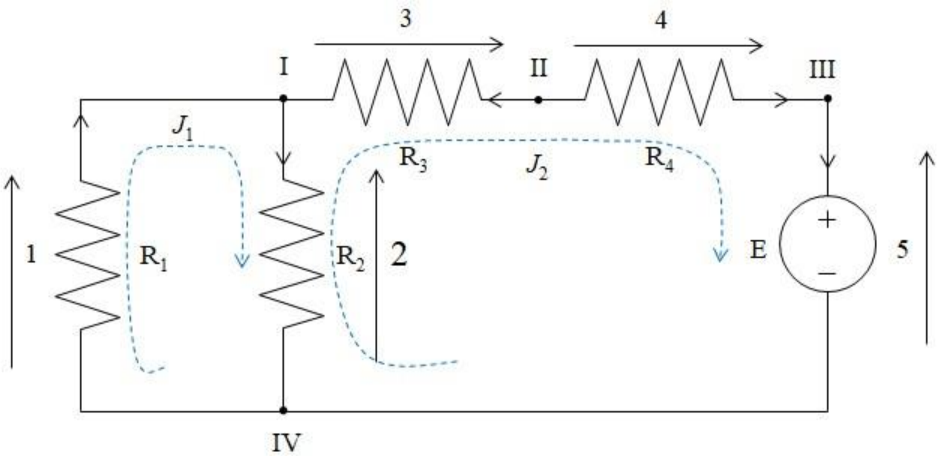


Fig. 4.36 – Esercizio da risolvere con il metodo delle correnti di maglia.

Ora esprimiamo le tensioni in funzione delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} V_1 = -R_1 J_1 \\ V_2 = R_2 (J_1 - J_2) \\ V_3 = -R_3 J_2 \\ V_4 = -R_4 J_2 \end{cases} \tag{4.68}$$

Si osservi come, nel sistema (4.68), sono stati presi i segni per le espressioni al secondo membro. Perché?

Sostituiamo le tensioni (4.68) nelle (4.67) e otteniamo:

$$\begin{cases} -R_1 J_1 - R_2 (J_1 - J_2) = 0 \\ R_2 (J_1 - J_2) - R_3 J_2 - R_4 J_2 - E = 0 \end{cases} \tag{4.69}$$

Il sistema (4.69) è un sistema di due equazioni in due incognite! La soluzione sarà:

$$J_1 = -2\text{A}, \quad J_2 = -4\text{A} \tag{4.70}$$

Che sostituite nel sistema (4.69) ci conduce al valore delle tensioni:

$$\begin{cases} V_1 = 1\text{V} \\ V_2 = 1\text{V} \\ V_3 = 1\text{V} \\ V_4 = 1\text{V} \\ V_5 = 3\text{V} \end{cases} \tag{4.71}$$

E poi al valore delle correnti, grazie alle relazioni caratteristiche:

$$\begin{cases} I_1 = -\dfrac{V_1}{\text{R}_1} = -2\text{A} \\ I_2 = \dfrac{V_2}{\text{R}_2} = 2\text{A} \\ I_3 = \dfrac{V_3}{\text{R}_3} = 4\text{A} \\ I_4 = -\dfrac{V_4}{\text{R}_4} = -4\text{A} \\ I_5 = -\dfrac{V_4}{\text{R}_4} = -4\text{A} \end{cases} \tag{4.72}$$

6 La serie e il parallelo di generatori ideali

Il concetto di bipolo equivalente in serie ed in parallelo può essere esteso ai generatori di tensione e di corrente ideali.

Vediamo prima la connessione serie.

Nella Fig. 4.37, applicando la II legge di Kirchhoff banalmente troviamo che i due generatori in serie equivalgono ad un unico generatore il cui valore è la somma dei due.

Nella Fig. 4.38, il generatore di corrente impone la sua corrente in entrambi i generatori posti in serie, mentre la tensione V rimane indeterminata essendo $V=V_J+E$ con V_J indeterminata.

Nella Fig. 4.39, si ha una incompatibilità perché ogni generatore impone ognuno la propria corrente entrando in conflitto con l'altro. Ma questo non ci è nuovo. Nel modello circuitale possiamo usare i generatori ideali, che sono componenti idealizzati, ma dobbiamo stare attenti a collegarli insieme in modo da non farli essere in conflitto.

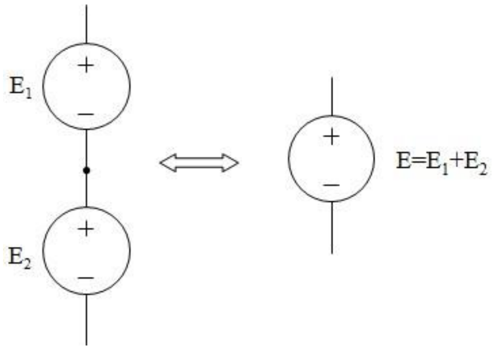


Fig. 4.37 – Connessione serie di generatori ideali di tensione.

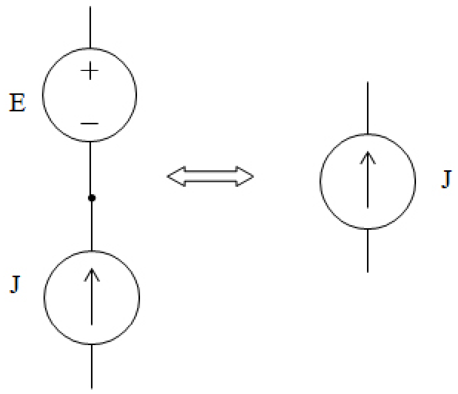


Fig. 4.38 – Connessione serie di un generatore ideale di tensione e uno ideale di corrente.

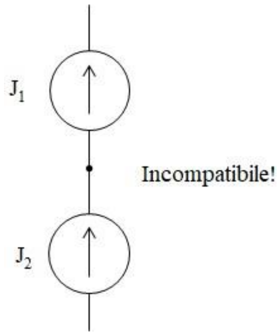


Fig. 4.39 – Connessione serie di generatori ideali di corrente.

Vediamo ora la connessione parallelo.

Nella Fig. 4.40 si ha l'equivalenza ad un unico generatore di corrente che eroga una corrente pari alla somma delle correnti erogate dai due generatori considerati.

Nella Fig. 4.41, la corrente I_E del generatore di tensione è indeterminata e quindi lo è I, mentre la tensione è fissata dal generatore di tensione.

Nella Fig. 4.42, abbiamo nuovamente una situazione incompatibile. Infatti i generatori di tensione chiudono una maglia entrando in conflitto con i loro valori e questo non è ammissibile.

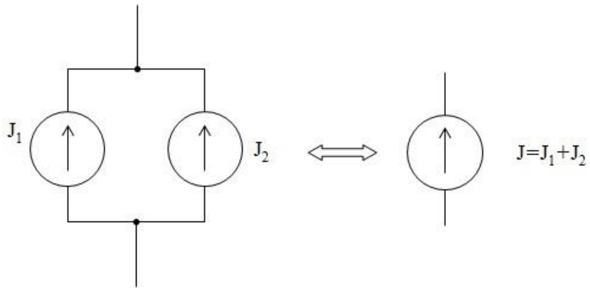


Fig. 4.40 – Connessione parallelo di generatori ideali di corrente.

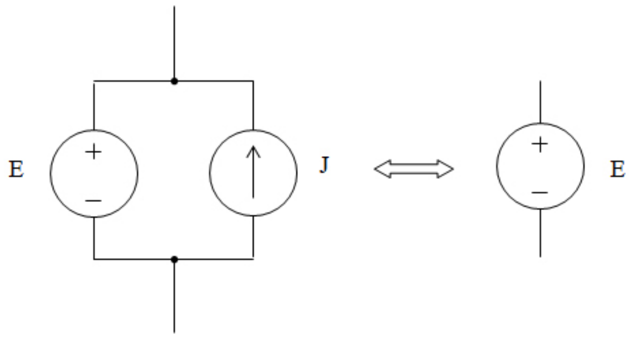


Fig. 4.41 – Connessione parallelo di un generatore ideale di corrente e uno di tensione.

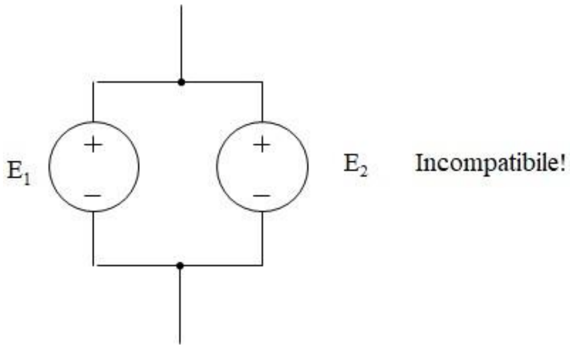


Fig. 4.42 – Connessione parallelo di generatori ideali di tensione.

È chiaro che connessioni serie e parallelo di generatori ideali possono essere considerate equivalenti ad un unico generatore anche in regime dinamico, basterà considerare l'equivalenza valida in ogni istante temporale.

7 La trasformazione stella - triangolo

Vi sono alcuni casi in cui non è possibile trovare una resistenza equivalente in quanto non è possibile procedere alla riduzione serie o parallelo. È il caso di Fig. 4.43, dove, volendo calcolare la resistenza equivalente vista ai morsetti A–B della figura, non è possibile procedere con serie e paralleli. Ciò è dovuto alla presenza di ***stelle*** e ***triangoli di resistori*** nel sotto-circuito di cui si vuole calcolare la resistenza equivalente. Le resistenze R_{12}, R_{13} e R_{23} formano un triangolo così come le resistenze R_{12}, R_{14} e R_{24}. Le resistenze R_{13}, R_{12} e R_{14} formano una stella così come le resistenze R_{12}, R_{24} e R_{23}. Per ovviare a questo problema si procede effettuando una "trasformazione" da triangolo a stella o viceversa basata sul principio di equivalenza definito nel § 1.1.

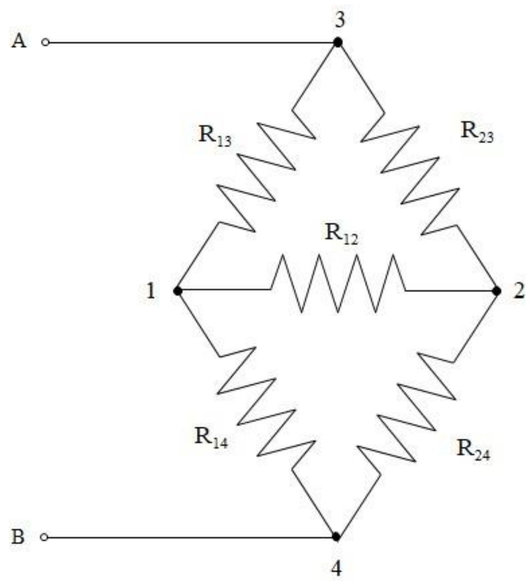


Fig. 4.43 – Esempio di connessione di resistenze non riducibili ad una resistenza equivalente.

Osserviamo che se trasformiamo, come illustrato in Fig. 4.44, il triangolo R_{12}, R_{13} e R_{23} in una stella (R_1, R_2 e R_3) possiamo poi procedere al calcolo della resistenza equivalente complessiva. Questa si calcola in questo modo: R_1 serie con R_{14}, parallelo con R_2 serie R_{24}, il tutto in serie a R_3. Nella Fig. 4.44 si può osservare la comparsa di un nuovo nodo, il nodo 5, corrispondente al ***centro stella*** della stella equivalente al triangolo originario.

Vogliamo sottolineare che una stella di resistori e un triangolo di resistori sono dei sotto-circuiti diversi da quello di Fig. 4.1. Mentre il sotto-circuito di Fig. 4.1 può essere sostituito da un bipolo equivalente avente la stessa relazione caratteristica del sotto-circuito, le stelle e triangoli di resistori sono dei ***tri–poli*** e possono essere sostituiti solo da altri tri–poli. I tri–poli sono degli N–poli con N=3. Nella Lezione 10 vedremo una breve descrizione degli N–poli.

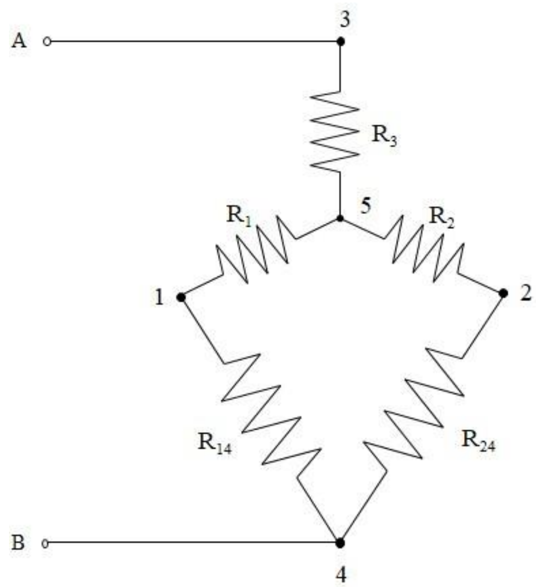


Fig. 4.44 – Circuito di Fig. 4.43 dove è stata effettuata una trasformazione triangolo – stella.

Questo modo di procedere si può generalizzare a tutti i casi in cui vi sono stelle o triangoli che intralciano la riduzione del sotto-circuito ad un'unica resistenza equivalente.
In virtù del principio di equivalenza, diciamo che una stella e un triangolo ai loro tre morsetti sono equivalenti se il funzionamento del circuito che utilizza il sotto-circuito con la stella o con il triangolo, non cambia. Per rendere equivalenti una stella e un triangolo di resistori dobbiamo scegliere opportunamente i resistori che li costituiscono. È evidente che quindi esiste una relazione tra le resistenze della stella e quelle del triangolo e queste relazioni devono essere soddisfare affinché l'equivalenza sia verificata. Vogliamo trovare questa relazione. La procedura che seguiremo è analoga a quella utilizzata quando abbiamo trovato la resistenza equivalente serie e parallelo (vedi § 2). In riferimento alla Fig. 4.45, imponiamo che i due sotto-circuiti C_{Rt} e C_{Rs} collegati ad un medesimo sotto-

circuito *C* producono valori delle tensioni a correnti uguali (*V* e *I* della figura), in altre parole, imponiamo che i due sistemi sollecitati allo stesso modo, ad esempio alimentati da stessi generatori di caratterizzazione, reagiscano nella medesima maniera. Ovviamente possiamo scegliere ad arbitrio cosa considerare come sotto-circuito *C* della Fig. 4.45. La scelta più semplice è quella di considerare dei generatori di caratterizzazione collegati opportunamente ai tre morsetti dei tri-polo stella e triangolo.

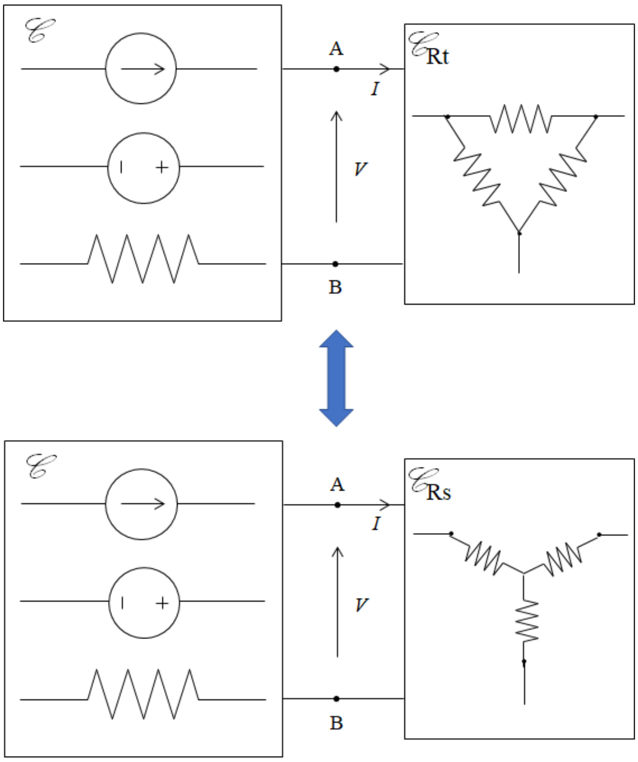


Fig. 4.45 – Equivalenza stella–triangolo.

In riferimento alle Fig. 4.46 e Fig. 4.47, dove abbiamo rappresentato rispettivamente una configurazione a triangolo e una a stella, calcoliamo i legami tra le resistenze R_1, R_2, R_3 e R_{12}, R_{13}, R_{23} che verifichino l'equivalenza.

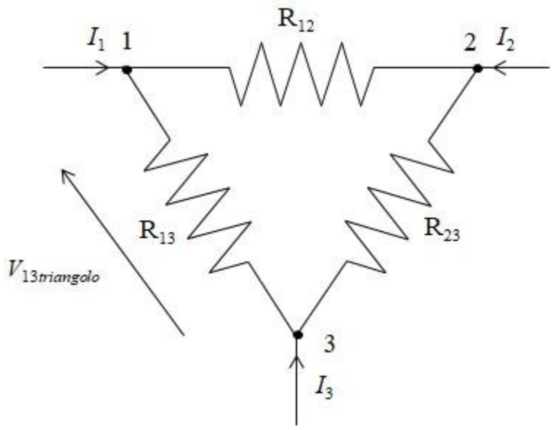


Fig. 4.46 – Tre resistori connessi a triangolo.

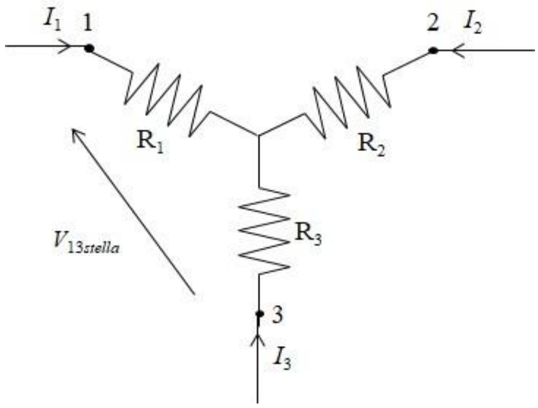


Fig. 4.47 – Tre resistori connessi a stella.

Abbiamo bisogno di tre equazioni che legano le tre terne di parametri perché tre sono le resistenze in entrambi i sistemi, quindi imponiamo l'equivalenza delle due configurazioni, a stella e a triangolo, in tre casi diversi, utilizzando opportuni generatori di caratterizzazione.

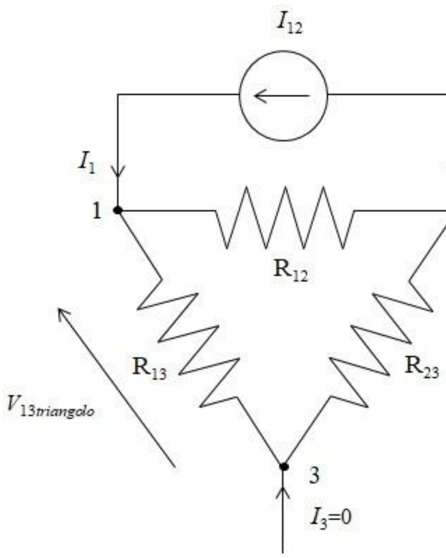


Fig. 4.48 – Tre resistori connessi a triangolo opportunamente alimentati.

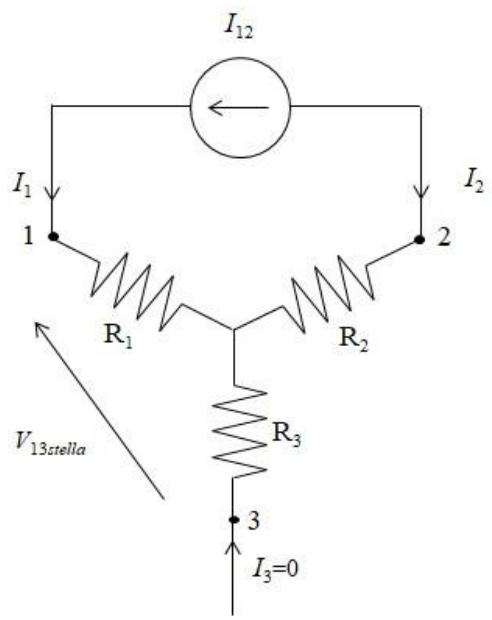


Fig. 4.49 – Tre resistori connessi a stella opportunamente alimentati.

1 caso)

Colleghiamo un generatore di corrente, come abbiamo fatto nelle Fig. 4.48 e Fig. 4.49, tra i morsetti 1 e 2, e diciamo che il generatore eroga una corrente I_{12}; lasciamo che il morsetto 3 sia ***fluttuante*** (uno dei morsetti di un bipolo fluttuante non è collegato a nulla e questo impedisce il passaggio di corrente) in entrambi i casi. Ora, con riferimento alla sola Fig. 4.49, abbiamo che:

$$I_1 = I_{12},\ I_2 = -I_{12},\ I_3 = 0 \tag{4.73}$$

2 caso)

Colleghiamo, sempre con riferimento alla stella di resistori Fig. 4.49, un generatore di corrente tra i morsetti 2 e 3, diciamolo I_{23}, e lasciamo il morsetto 1 fluttuante:

$$I_2 = I_{23},\ I_3 = -I_{23},\ I_1 = 0 \tag{4.74}$$

3 caso)

Colleghiamo, ancora una volta con riferimento alla stella di resistori di Fig. 4.49, un generatore di corrente tra i morsetti 1 e 3, diciamolo I_{13} e lasciamo il morsetto 2 fluttuante:

$$I_1 = I_{13},\ I_3 = -I_{13},\ I_2 = 0 \tag{4.75}$$

Imponiamo l'equivalenza per la prima configurazione (caso 1). Imponiamo, cioè, che le tensioni $V_{13stella}$ e $V_{13triangolo}$ siano uguali, cioè:

$$V_{13stella} = V_{13triangolo} \tag{4.76}$$

Essendo dalla relazione caratteristica del resistore e per la (4.74) la $V_{13stella} = R_1 I_1$ e ragionando per mezzo di un partitore di corrente su $V_{13triangolo}$ avremo:

$$V_{13stella} = R_1 I_1 \ \text{e}\ V_{13triangolo} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} I_1 \tag{4.77}$$

E dovendo valere la (4.76), si ottiene la relazione cercata:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \tag{4.78}$$

Analogamente possiamo operare negli altri due casi e otteniamo le relazioni:

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \tag{4.79}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \tag{4.80}$$

In definitiva la trasformazione triangolo – stella è dato dalle relazioni (4.78), (4.79), (4.80). Per la trasformazione stella – triangolo è necessario invertire le relazioni trovate. Si ha:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3} \tag{4.81}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1} \tag{4.82}$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2} \tag{4.83}$$

In conclusione, per sostituire un triangolo ad un stella di resistenze e viceversa è necessario applicare rispettivamente le (4.78), (4.79), (4.80) oppure le (4.81), (4.82) e (4.83)

7.1 Esercizio: circuito a ponte

Consideriamo il ***circuito a ponte*** di Fig. 4.50. Vogliamo calcolare il valore della tensione V_{24} sulla resistenza R_{24}.

DATI: E=10V, R_{12}=2Ω, R_{13}=4Ω, R_{23}=6Ω, R_{14}=3Ω, R_{24}=5Ω.

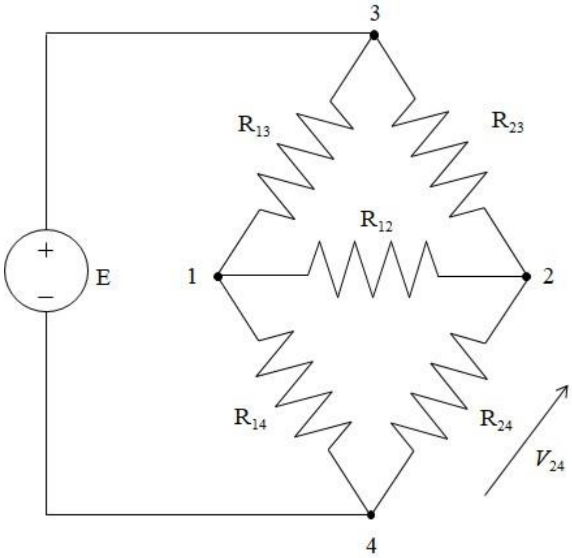


Fig. 4.50 – Circuito a ponte.

A meno di risolvere un siffatto esercizio scrivendo tutte le equazioni di Kirchhoff per il circuito, dobbiamo procedere ad una trasformazione stella–triangolo se vogliamo calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore di tensione e poi utilizzare i partitori di tensione e corrente. Facciamo riferimento alla Fig. 4.51 dove abbiamo operato la trasformazione triangolo stella.

Dalle (4.78), (4.79) e (4.80):

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = \frac{2}{3}\Omega \tag{4.84}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = 1\Omega \tag{4.85}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = 2\Omega \tag{4.86}$$

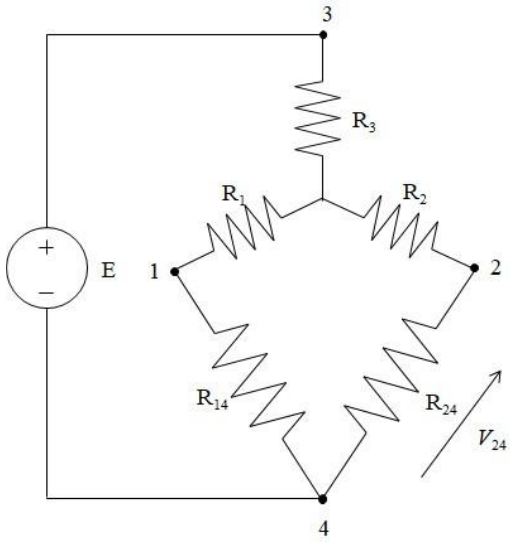


Fig. 4.51 – Circuito a ponte di Fig. 4.50 con sostituzione triangolo-stella.

A questo punto possiamo considerare le resistenze serie:

$$R_1 + R_{14} = \frac{11}{3}\Omega \tag{4.87}$$

$$R_2 + R_{24} = 6\Omega \tag{4.88}$$

e il loro parallelo

$$R_{eq} = \frac{66}{29}\Omega\,. \tag{4.89}$$

Con il partitore di tensione possiamo calcolare la tensione sulla R_{eq}:

$$V_{eq} = \frac{R_{eq}}{R_3 + R_{eq}} E = \frac{165}{31} V \tag{4.90}$$

Possiamo infine applicare ancora un partitore di tensione tra R_2 e R_{24}:

$$V_{24} = \frac{R_{24}}{R_2 + R_{24}} V_{eq} = \frac{275}{62} V \tag{4.91}$$

L’esercizio è risolto.

Si propone allo studente di risolvere il seguente quesito: come devo scegliere il valore delle resistenze affinché nel resistore R_{12} di Fig. 4.50 non circoli corrente. Questa condizione si verifica nel caso di “ponte equilibrato”.

8 La formula di Millman

Quando un circuito è riducibile a soli due nodi A e B, è possibile determinare la tensione ai capi dei nodi in modo alquanto semplice grazie alla ***formula di Millman.*** È possibile applicare tale formula quando il circuito si presenta in una forma particolare, ad esempio quella mostrata in Fig. 4.52.

La formula può essere cosi descritta: *la tensione tra i due nodi della rete è data dal rapporto che ha al numeratore la somma algebrica delle tensioni dei generatori (di tensione) divise per la resistenza del ramo ad esso relativo e delle correnti dei generatori ideali di corrente, al denominatore la somma delle conduttanze di tutti i rami tranne quelli in cui vi sono generatori ideali di corrente*. I segni dei termini considerati dipendono dai versi fissati sui generatori.

Consideriamo il circuito di Fig. 4.52. Vogliamo calcolare la tensione V_{AB}. Il circuito in esame rappresenta il caso più generale possibile nel quale ho tutti i tipi di bipoli possibili tra i nodi A e B. Manca il caso di un generatore ideale di tensione collegato ai morsetti A–B che tuttavia imporrebbe immediatamente il proprio valore di tensione a V_{AB}. Non è quindi ammesso un lato in cui sia presente un generatore ideale di tensione.

I circuiti a cui poter applicare la formula di Millman potranno avere configurazioni diverse dalla Fig. 4.52, l’importante è che abbiano i bipoli dei vari lati in parallelo uguali ad uno di quelli presenti nella figura.

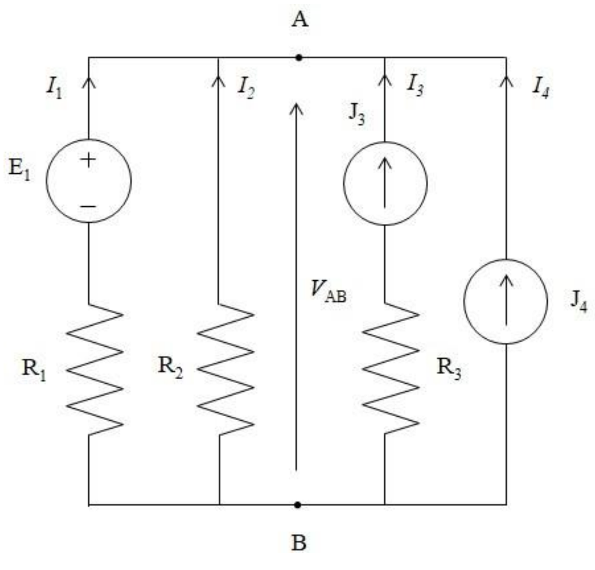


Fig. 4.52 – Circuito a cui applicare la formula di Millman.

Vediamo come fare per trovare la formula sopra definita.

Per determinare la tensione presente tra i nodi A e B, diciamola V_{AB} nel circuito di Fig. 4.52, cominciamo con l'imporre che la somma di tutte le correnti presenti nei rami è nulla. Scriviamo, cioè, la LKC al nodo A assumendo con segno positivo le correnti in esso entranti:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \qquad (4.92)$$

Poi esprimeremo tutte le correnti in funzione della tensione V_{AB} dove questo sia possibile. Ricorrendo alla LKT per le diverse maglie o alle relazioni caratteristiche dei resistori, scriviamo che:

$$I_1 = -\frac{V_{AB} - E_1}{R_1}, I_2 = -\frac{V_{AB}}{R_2} \qquad (4.93)$$

Inoltre, teniamo conto del fatto che $I_3 = J_3$ e $I_4 = J_4$. Sostituendo nella (4.92), otteniamo:

$$-\frac{V_{AB} - E_1}{R_1} - \frac{V_{AB}}{R_2} + J_3 + J_4 = 0 \qquad (4.94)$$

Da cui otteniamo quanto richiesto:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + J_3 + J_4}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \qquad (4.95)$$

Che è quanto descritto nella definizione!

Questo metodo in apparenza può sembrare limitato in quanto si deve avere un circuito della forma rappresentata in Fig. 4.52, ma spesso se partiamo dal circuito iniziale e operiamo con trasformazioni stella–triangolo, con resistenze equivalenti serie e parallelo, con il teorema del generatore equivalente (vedi Lezione 5) riusciamo a ricondurci al caso della Fig. 4.52.

8.1 Esercizio

Vogliamo risolvere il l'esercizio mostrato in Fig. 4.53.

DATI: $E=10V$, $J=3A$, $R_1=2\Omega$, $R_2=4\Omega$, $R_3=6\Omega$, $R_4=3\Omega$, $R_5=5\Omega$.

Ci viene chiesto di determinare la tensione V_3 mostrata in figura.

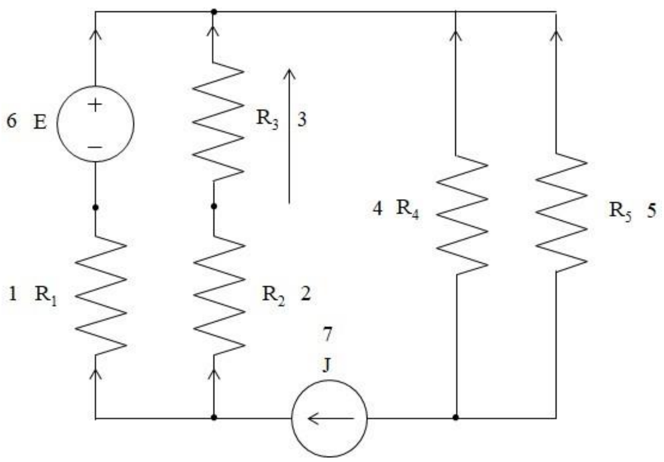


Fig. 4.53 – Esercizio da risolvere con la formula di Millman.

Il circuito si presenta non esattamente nella configurazione idonea alla formula di Millman della Fig. 4.52. Tuttavia, possiamo osservare che se consideriamo la resistenza equivalente al parallelo di R_4 e R_5 come in Fig. 4.54, allora ci ritroviamo in una configurazione in cui poter applicare la formula di Millman.

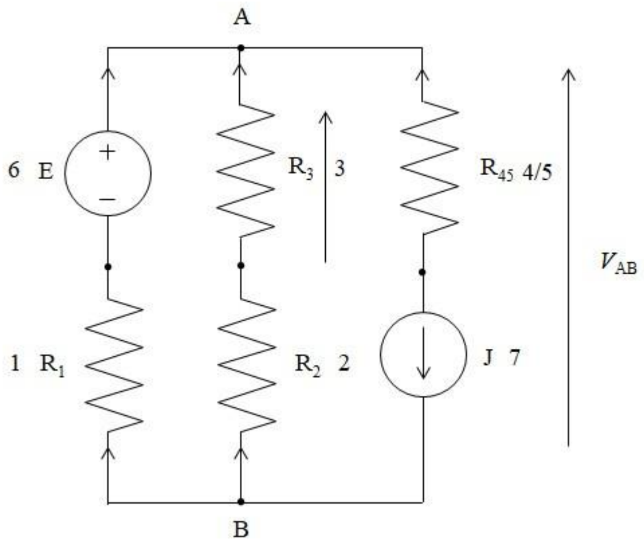


Fig. 4.54 – Circuito di Fig. 4.53 semplificato.

Dalla Fig. 4.54 osserviamo che la resistenza R_2 è in serie alla resistenza R_3, e quindi nella formula di Millman ci conviene utilizzare la resistenza equivalente serie $R_{23}=R_2+R_3$. Possiamo quindi scrivere:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E}{R_1} - J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}} = \frac{10}{3}\text{V} \qquad (4.96)$$

Dove V_{AB} è quella indicata in Fig. 4.54. Si noti il segno negativo davanti al corrente del generatore J. Esso dipende dal fatto che il verso del generatore è opposto rispetto a quello presente nella Fig. 4.52 e quindi discorde rispetto al verso con cui abbiamo orientato la corrente su quel ramo.

Per ultimare l'esercizio è necessario ora effettuare un partitore di tensione tra le due resistenze R_2 e R_3. Scriviamo:

$$V_3 = \frac{R_3}{R_2+R_3} V_{AB} = 2\text{V} \qquad (4.97)$$

9 Il calcolo della potenza nei circuiti adinamici

Nel § 3 della Lezione 1 abbiamo introdotto la potenza relativa ad un bipolo nella formula (1.5):

$$\mathrm{p}(t) = v(t)\,i(t) \tag{4.98}$$

Abbiamo imparato che la potenza della (4.98) è assorbita o erogata a seconda che abbiamo fatto sul bipolo la convenzione dell'utilizzatore o del generatore.
Nel caso di circuiti adinamici la (4.98) possiamo riscriverla come:

$$\mathrm{P} = VI \tag{4.99}$$

Per calcolare, quindi, la potenza assorbita o erogata da un bipolo è possibile utilizzare la (4.99) che necessita solo della conoscenza di *V* e *I* del bipolo.
Per circuiti con un generatore è facile operare senza imbattersi in errori concettuali. Nel caso invece di circuiti con più generatori è necessario fare un po' di attenzione. Per affrontare il tema abbiamo proposto il seguente paragrafo.

9.1 Il calcolo della potenza in circuiti con due generatori

Quando un circuito adinamico è lineare ed ha due generatori che alimentano il circuito, sappiamo che possiamo utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. In riferimento ad un generico bipolo presente nel circuito, dalla (4.54), possiamo scrivere:

$$V = V_1 + V_2, \quad I = I_1 + I_2 \tag{4.100}$$

Volendo calcolare la potenza (assorbita o erogata) dal bipolo, sarà necessario considerare il prodotto:

$$VI = (V_1 + V_2)(I_1 + I_2) \neq V_1 I_1 + V_2 I_2 \tag{4.101}$$

La (4.101) ci mostra come la potenza non segue il principio di sovrapposizione in quanto NON essendo lineare essa non è uguale alla somma delle potenze calcolate sul bipolo quando agisce un generatore alla volta!

Per fissare bene il concetto risolviamo il seguente esercizio.

9.1.1 Esercizio

Nel circuito di Fig. 4.55 si vuole calcolare la potenza assorbita dal resistore R_5.

DATI: E_1=10V, E_2=5V, R_1=2Ω, R_2=4Ω, R_3=6Ω, R_4=3Ω, R_5=5Ω.

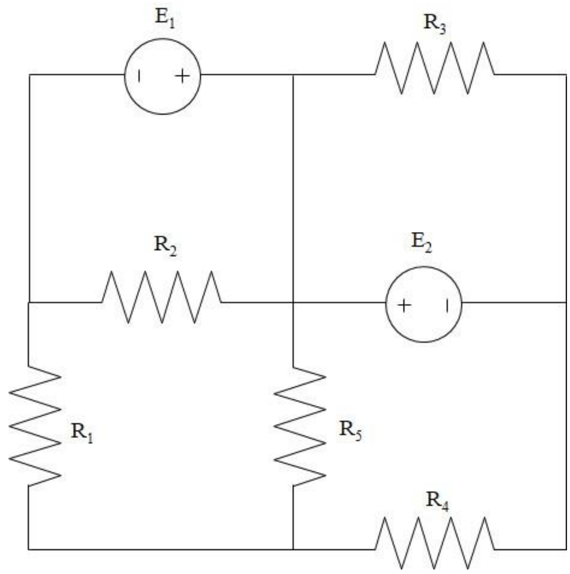


Fig. 4.55 – Esercizio con calcolo potenza per circuito con due generatori.

Il <u>primo passo</u> per risolvere l'esercizio è di numerare i nodi e i lati, e stabilire il verso della corrente e della tensione della resistenza R_5. Lo abbiamo fatto nella Fig. 4.56. Si osservi che i versi di tensione V_5 e corrente I_5 sono opposti perché ci viene chiesta la potenza assorbita e non quella erogata, quindi per comodità abbiamo scelto la convenzione dell'utilizzatore. La potenza richiesta dall'esercizio sarà:

$$\mathrm{P} = V_5 I_5 = \mathrm{R}_5 I_5^2 = \frac{V_5^{\,2}}{\mathrm{R}_5} \tag{4.102}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione caratteristica del resistore $V_5=\mathrm{R}_5 I_5$ per ottenere la potenza assorbita come funzione della sola corrente o della sola tensione. Per risolvere l'esercizio basterà calcolare o V_5 o I_5 (non necessariamente entrambe) per poi usare la (4.102).

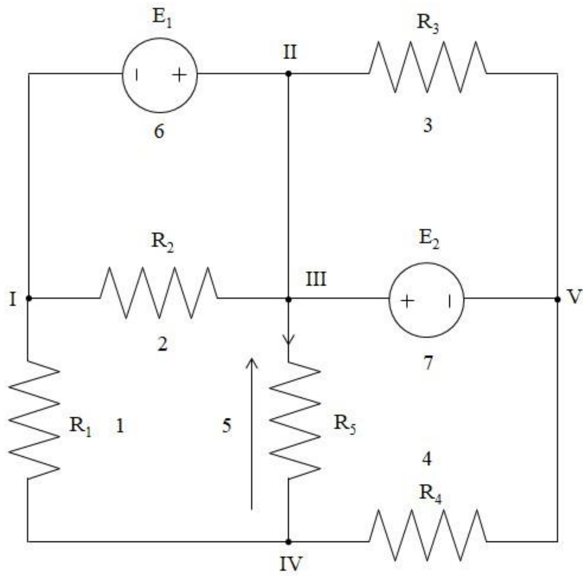


Fig. 4.56 – Circuito di Fig. 4.55 con i versi di tensione e corrente necessari esplicitati e con nodi e lati numerati.

A questo punto dobbiamo elaborare una strategia risolutiva[6].

Il secondo passo è quello di "osservare" il circuito di Fig. 4.56. Questo step è molto importante perché sarà utile al passo successivo nel quale bisognerà delineare la vera e propria strategia di ***problem solving***.

Osserviamo quanto segue:

1) Il circuito è adinamico e lineare.
2) Il circuito ha due generatori di tensione. Ognuno di questi si trova in parallelo ad un resistore. In particolare, E_1 è in parallelo a R_2, e E_2 è in parallelo a R_3.
3) Il problema da risolvere consiste nell'individuare le grandezze di un singolo bipolo del circuito.
4) Il circuito non si presta ad un immediato utilizzo della formula di Millman.
5) Non vi sono resistenze in parallelo e in serie che possano essere ridotte ad una resistenza equivalente.

Il terzo passo consiste nella individuazione della strategia risolutiva.

[6] Questo è il primo esercizio proposto nel quale non si indica l'utilizzo di un metodo di risoluzione specifico. Sarà dunque necessario allenarsi ad individuare una strategia risolutiva al problema proposto, sviluppando il "problem solving", una caratteristica fondamentale per l'ingegnere moderno. Non esiste un'unica strategia risolutiva. Come vedremo a breve, e come vedremo meglio nel § 10, converrà orientarsi verso quella più "efficiente".

Poiché abbiamo bisogno di conoscere le grandezze di un singolo bipolo, non ci conviene agire utilizzando il sistema di equazioni circuitali del circuito, piuttosto possiamo procedere in maniera mirata utilizzando altri strumenti più efficienti[7]. Gli strumenti che abbiamo a disposizione a questo punto del corso sono:

a) Sovrapposizione degli effetti
b) Calcolo di resistenze serie e parallelo equivalenti per semplificare il circuito (da scartare poiché abbiamo detto che non vi sono serie e parallelo di resistenze)
c) Trasformazione stella–□riangolo
d) Formula di Millman (da scartare data la topologia del circuito)
e) Partitori di tensione e corrente

Rinunziando ad una stima puntuale di tutte le strategie possibili e del rispettivo costo computazionale, possiamo procedere guidati da buon senso ragionando come nel seguito: La trasformazione del triangolo di resistenze R_1, R_2, R_5 non conviene prenderla in considerazione poiché a noi interessa conoscere le grandezze su R_5 ed effettuando la trasformazione "perdiamo" la presenza del bipolo nel circuito modificato[8].

Ci rimangono gli strumenti (a) ed (e). Utilizzeremo il principio di sovrapposizione degli effetti prendendo in esame i due circuiti di Fig. 4.57 e Fig. 4.58 (anche detti ***circuiti ausiliari***). Successivamente utilizzeremo dei partitori di tensione. Infatti, essendo alimentati da generatori di tensione i due circuiti considerati nelle Fig. 4.57 e Fig. 4.58, vorranno essere risolti convenientemente con partitori di tensione.

[7] Un metodo risolutivo lo definiamo più "efficiente" di un altro se comporta un numero inferiore di calcoli e allo stesso tempo una complessità di calcolo inferiore (vedi § 10).

[8] Ogni volta che si effettua una trasformazione di un sotto-circuito in un altro, si perdono i dettagli del sistema di origine. Ad esempio, se si sostituisce una resistenza equivalente con la serie di due resistori, nel nuovo circuito perdiamo il dettaglio della tensione sui singoli resistori presenti inizialmente.

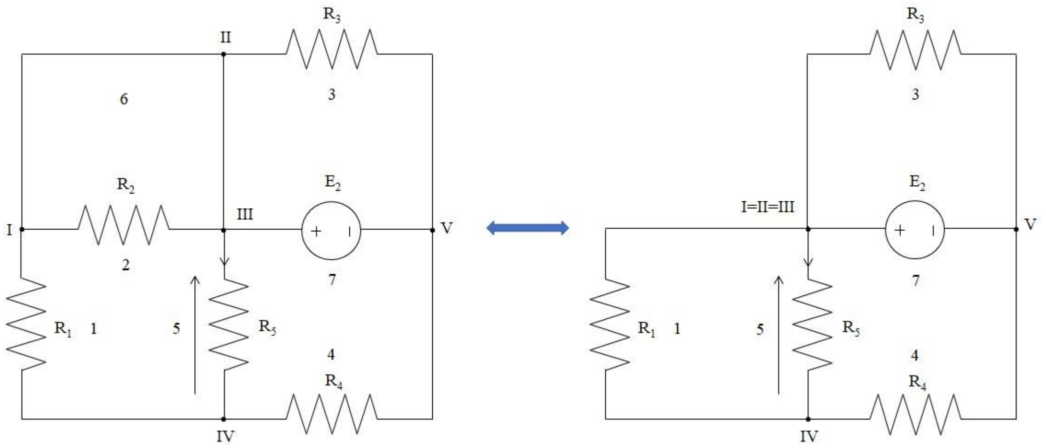


Fig. 4.57 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 4.56 con di generatore di tensione E_1 spento.

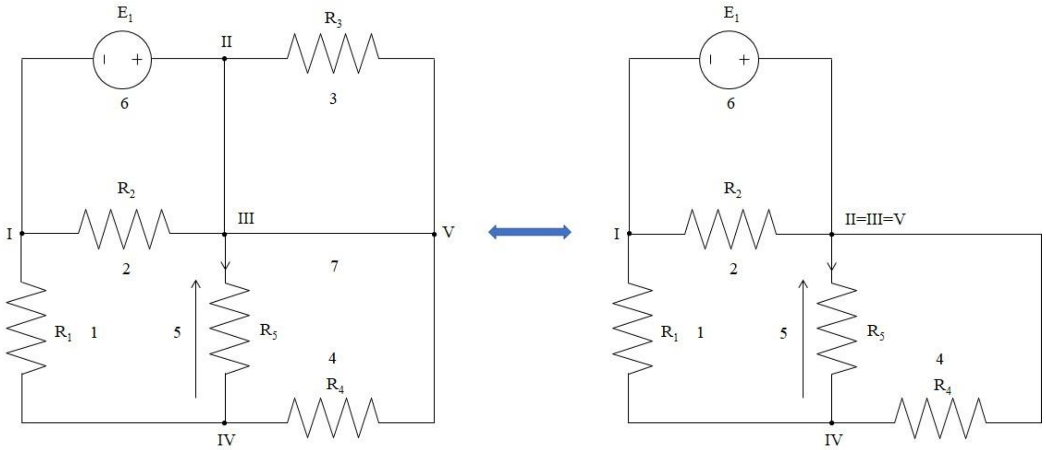


Fig. 4.58 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 4.56 con generatore di tensione E_2 spento.

Facciamolo!

Puntiamo a trovare le tensioni V_{5E1} e V_{5E2} ricordando che per il principio di sovrapposizione degli effetti risulta:

$$V_5 = V_{5E_1} + V_{5E_2} \tag{4.103}$$

Cominciamo con la V_{5E1}. Osservando il circuito di Fig. 4.58, notiamo che le resistenze R_4 e R_5 sono in parallelo. Possiamo considerare la resistenza equivalente R_{45}:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{15}{8}\Omega \qquad (4.104)$$

e quindi il circuito semplificato di Fig. 4.59. La tensione V_{5E1} è quella del parallelo R_{45} come indicato in figura. Facciamo riferimento alla maglia disegnata in Fig. 4.59 e applichiamo il partitore di tensione (riflettendo ancora una volta sui segni e sui versi delle tensioni…):

$$V_{5E_1} = \frac{R_{45}}{R_{45} + R_1} E_1 = \frac{150}{31} V \qquad (4.105)$$

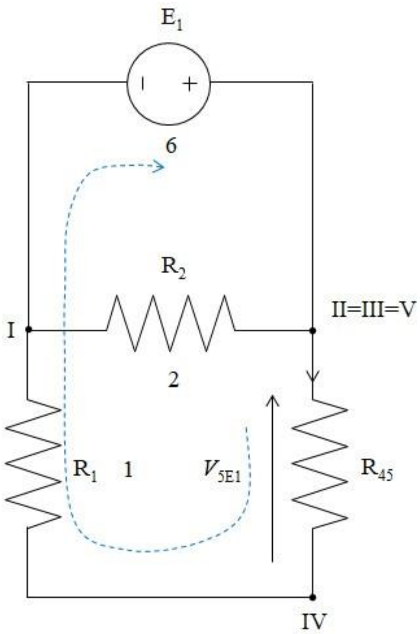


Fig. 4.59 – Circuito di Fig. 4.58 semplificato con l'indicazione di una maglia.

Continuiamo con la V_{5E2}. Osservando il circuito di Fig. 4.57, notiamo che le resistenze R_1 e R_5 sono in parallelo. Possiamo considerare la resistenza equivalente R_{15}:

$$R_{15} = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_5} = \frac{6}{5}\Omega \qquad (4.106)$$

e quindi il circuito semplificato di Fig. 4.60. La tensione V_{5E2} è quella del parallelo R_{15} come indicato in figura. Facciamo riferimento alla maglia disegnata in Fig. 4.60 e applichiamo il partitore di tensione:

$$V_{5E_2} = \frac{R_{15}}{R_{15}+R_4} E_2 = \frac{10}{7} V \tag{4.107}$$

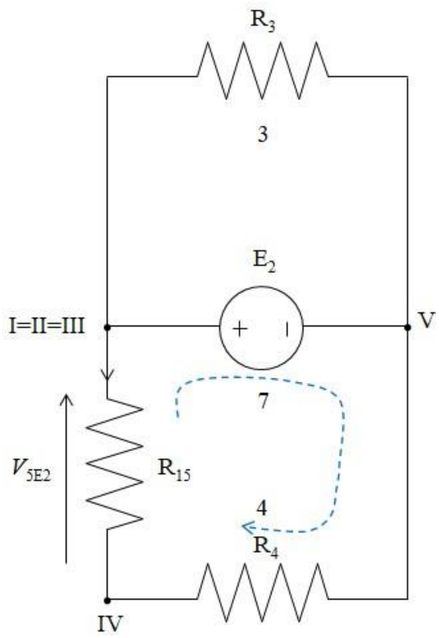


Fig. 4.60 – Circuito di Fig. 4.57 semplificato con l'indicazione di una maglia.

Per risolvere l'esercizio è necessario il calcolo della tensione V_5. Dalla (4.103) si ha:

$$V_5 = V_{5E_1} + V_{5E_2} = \frac{150}{31} + \frac{10}{7} = 6.27V \tag{4.108}$$

Si osservi che in entrambi i circuiti di Fig. 4.59 e Fig. 4.60 si è dato il caso in cui nella maglia considerata il verso della tensione cercata è opposto a quello del generatore e questo implica un segno positivo nei due partitori di tensione (4.105) e (4.107).

9.2 I circuiti con wattmetri

In questo paragrafo vedremo come calcolare la misura di un wattmetro inserito in un circuito.

Una occasione in cui è necessario calcolare la potenza di un bipolo è quando si vuole determinare analiticamente la lettura di un wattmetro. Ricordiamo dalla Lezione 2, § 4, che il wattmetro è un dispositivo di misura della potenza assorbita o erogata da un bipolo.

Per determinare analiticamente la misura del wattmetro basta individuare esso a quale bipolo si riferisce e se misura una potenza assorbita o erogata. Dopo di ché basta trovare la tensione e la corrente del bipolo e valutarne in prodotto.

A parte il caso suddetto, è possibile incorrere in circuiti nei quali il wattmetro è inserito in maniera tale che il valore rilevato dall'apparato di misura non sia relativo alla potenza di uno specifico bipolo. Nell'esercizio che proponiamo a seguire è studiato proprio questo caso.

9.2.1 Esercizio

Consideriamo il circuito di Fig. 4.61.

DATI: E=10V, R_1=3Ω, R_2=1Ω, R_3=1Ω, R_4=6Ω.

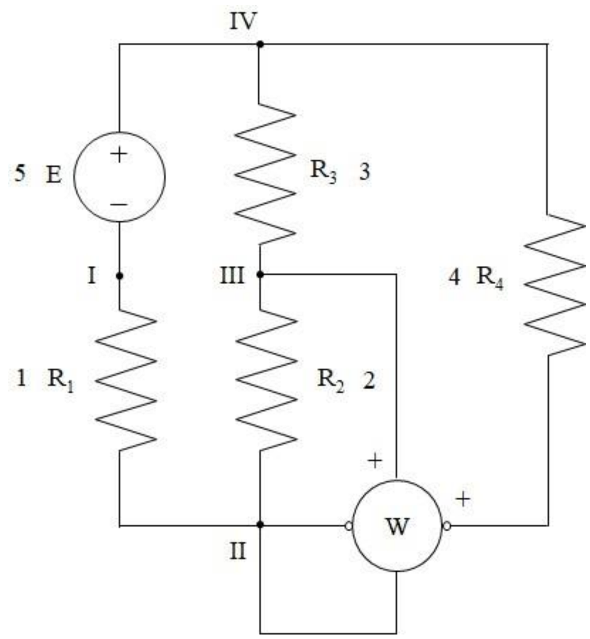


Fig. 4.61 – Circuito con wattmetro.

Per prima cosa è necessario individuare cosa misura il wattmetro. Per fare questo ricordiamoci che nella Lezione 2 abbiamo introdotto il wattmetro nella Fig. 2.28. Avevamo detto che esso misurava la potenza p(t)=v(t)i(t), che in questo caso di circuito adinamico diventa:

$$\mathrm{P} = VI \qquad (4.109)$$

dove con P abbiamo indicato la potenza misurata dal wattmetro di Fig. 4.61. Bisognerà dunque specificare chi sono V e I nella (4.109). Per stabilire ciò è necessario riconoscere la voltmetrica del wattmetro dove ha collegati i morsetti e l'amperometrica dove è stata inserita. Dalla Fig. 4.61 osserviamo che la voltmetrica è collegata ai nodi II-III e quindi rileva la tensione sul resistore R_2 e l'amperometrica è stata inserita nel lato 4 e quindi misura la corrente di tale lato. Per stabilire il verso della tensione e corrente misurata occorre notare dove sono indicati i segni + del wattmetro. Pertanto in conclusione possiamo affermare che il wattmetro misura:

$$\mathrm{P} = V_2 I_4 \qquad (4.110)$$

Dove V_2 e I_4 sono le grandezze indicate in Fig. 4.62.

Si osservi come nel caso di questo esercizio la potenza misurata dal wattmetro non riguarda quella assorbita (o erogata) da uno specifico bipolo, al contrario misura un prodotto tra tensione e corrente riguardanti bipoli diversi. Si tratterà dunque di una potenza "virtuale" in quanto, pur avendo le dimensioni fisiche di una potenza, non rappresenta una potenza reale. Un caso particolare potrebbe essere quello in cui il wattmetro misura una potenza reale in quanto la voltmetrica e l'amperometrica sono riferite ad un unico bipolo.

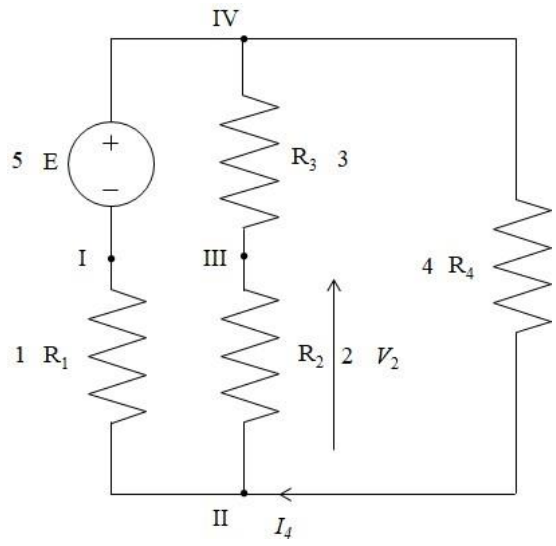


Fig. 4.62 – Circuito di Fig. 4.61 da risolvere per calcolare la misura del wattmetro.

Per valutare il valore di P della (4.110), e quindi risolvere l'esercizio, è necessario quindi calcolare V_2 e I_4 dal circuito di Fig. 4.62. A tal fine utilizziamo la formula di Millman e calcoliamo la tensione $V_{\text{IV-II}}$ utilizzando la formula (4.95) particolarizzata per questo caso specifico:

$$V_{\text{IV-II}} = \frac{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_1}}{\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3} + \frac{1}{\mathrm{R}_4}} = \frac{10}{3}\,\mathrm{V} \tag{4.111}$$

Una volta calcolata la tensione $V_{\text{IV-II}}$, possiamo calcolare la corrente I_4 dalla relazione caratteristica del resistore R_4:

$$I_4 = \frac{V_{\text{IV-II}}}{\mathrm{R}_4} = \frac{5}{9}\,\mathrm{A} \tag{4.112}$$

e la tensione V2 con un partitore di tensione:

$$V_2 = \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3} V_{\text{IV-II}} = \frac{5}{3}\,\mathrm{V} \tag{4.113}$$

e quindi la potenza misurata dal wattmetro richiesta:

$$P = \frac{5}{9} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{27} \text{W} \qquad (4.114)$$

9.3 La conservazione della potenza in un circuito adinamico

Nella Lezione 3 abbiamo enunciato il teorema di Tellegen che riguardava, in generale, la conservazione della potenza virtuale in un circuito. Se ci riferiamo ad un unico circuito, riscriviamo la (3.38) della Lezione 3 per circuito resistivo adinamico:

$$\sum_{i=1}^{l} I_i V_i = 0 \qquad (4.115)$$

La (4.115) riguarda la conservazione della potenza presente in un circuito. È una somma di termini dello stesso segno in quanto, per scrivere la (4.115) abbiamo utilizzato la stessa convenzione su tutti i bipoli. Nel caso stiamo trattando un circuito con convenzioni diverse su bipoli diversi allora bisognerà tenerne conto utilizzando segni opportuni per i diversi prodotti $V_i I_i$.
Nel prossimo paragrafo faremo un esercizio chiarificatore.

9.3.1 Esercizio

Nel circuito di Fig. 4.63 si vuole verificare la conservazione delle potenze come dalla formula (4.115).
Dati: E=10V, R_1=2Ω, R_2=4Ω, R_3=6Ω.

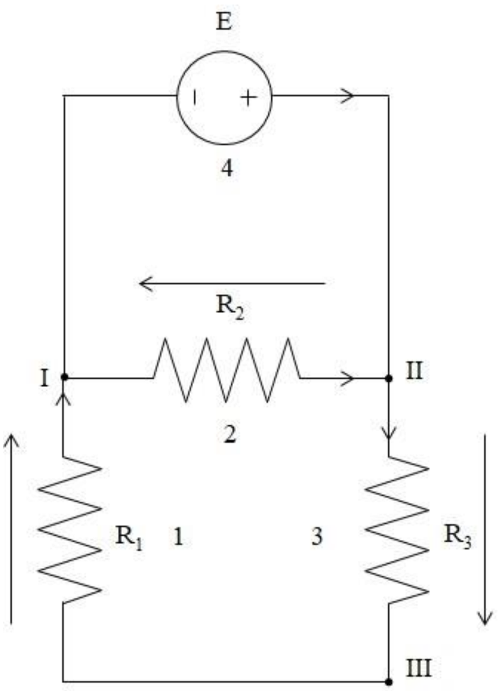


Fig. 4.63 – Esercizio con calcolo potenza per circuito con due generatori.

Considerando i versi, e quindi le convenzioni che abbiamo scelto (li ho scelti io) nella Fig. 4.63, la formula (4.115) può essere scritta come:

$$\mathrm{E}I_4 + V_1 I_1 - V_2 I_2 + V_3 I_3 = 0 \tag{4.116}$$

Dove abbiamo sommato potenze erogate!

La (4.116), utilizzando le relazioni caratteristiche delle tre resistenze può essere scritta anche come:

$$\mathrm{E}I_4 - R_1 I_1^2 - R_2 I_2^2 - R_3 I_3^2 = 0 \tag{4.117}$$

dove davanti al secondo e al quarto termine abbiamo cambiato segno perché su quelle resistenze abbiamo fatto la convenzione del generatore e quindi la relazione caratteristica da usare sarà: $V_1 = -\mathrm{R}_1 I_1$, $V_3 = -\mathrm{R}_3 I_3$.

La (4.117) la possiamo riscrivere più significativamente come:

$$\mathrm{E}I_4 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 \tag{4.118}$$

Che possiamo immediatamente interpretare come un bilancio di potenze: la potenza erogata dal generatore uguaglia le potenze assorbite dalle resistenze!
Vogliamo verificare che questo bilancio sia effettivo? A voi i calcoli!

10 Il *problem solving* dei circuiti elettrici

All'interno della teoria dei circuiti è possibile incontrare varie tipologie di problemi da risolvere definiti da un opportuno ***problem shaping***[9]. Ad esempio, possiamo individuare la classe dei problemi relativi alla progettazione dei circuiti, i cosiddetti problemi di sintesi (vedi § 3.3 della Lezione 10), quella relativa all'analisi analitica dei circuiti, quella relativa alla misura delle grandezze presenti in un circuito. In questo corso ci occuperemo principalmente di analizzare circuiti elementari attraverso alcuni strumenti analitici introdotti nell'ambito dei circuiti resistivi in regime stazionario, dei circuiti in regime sinusoidale e dei circuiti dinamici del I ordine.

Nel nostro caso l'azione del problem shaping è piuttosto banale e si sostanzia principalmente nella richiesta del calcolo analitico di una o più grandezze presenti nel circuito in esame. In generale, come vedremo nel dipanarsi delle successive lezioni, possiamo individuare i seguenti problemi:

- Calcolo di tutte le grandezze presenti nel circuito
- Calcolo di una sola grandezza presente nel circuito
- Calcolo di parametri del circuito (ad esempio la costante di tempo di un circuito dinamico, vedi § 3.2.3 della Lezione 6)
- Calcolo della caratterizzazione di un sotto-circuito (ad esempio la matrice caratteristica dei doppi bipoli, vedi Lezione 6)
- Calcolo dei parametri di un sotto-circuito equivalente ad un sotto-circuito assegnato (ad esempio, il circuito equivalente secondo Thevenin o Norton descritto nella Lezione 5)

Una volta definito il problema con un opportuno problem shaping, dobbiamo scegliere la strategia risolutiva del ***problem solving***[10]. Come è facile intuire dopo aver studiato questa Lezione (vedi soprattutto § 9.1), non esiste un'unica strategia risolutiva per un problema di analisi circuitale. Pertanto, la scelta della strategia risolutiva è un aspetto critico del

---

[9] Il ***problem shaping*** è una fase dell'intero processo di risoluzione di un problema e, si occupa di definire il problema in maniera da poter essere risolto nella fase successiva di ***problem solving***,

[10] Il ***problem solving*** è il complesso delle tecniche e delle metodologie necessarie all'analisi di un problema allo scopo di individuare e mettere in atto la soluzione, se possiamo dimostrare che ne esiste una sola, oppure la più efficiente, nel caso contrario.

problem solving dei circuiti. Tale scelta può essere lasciata all'intuito o all'automatismo[11] oppure può essere orientata da ragioni economiche rappresentate dai costi computazionali che la strategia scelta comporta.

Per ottimizzare i costi di risoluzione del problema vogliamo sottolineare come sia importante, prima di iniziare il processo risolutivo vero e proprio, individuare TUTTE le strategie risolutive per poi discernere quale sia la più conveniente da utilizzare. Per fare questo è necessario introdurre un parametro che definisca quale strategia sia più conveniente di un'altra. Nel nostro ambito, puramente analitico, il parametro da controllare potrebbe essere quello del costo computazionale in termini di numero e complessità delle relazioni da scrivere per arrivare alla risoluzione del problema. Quindi, un metodo risolutivo lo definiamo più "efficiente" di un altro se comporta un numero inferiore di "passi"[12] e allo stesso tempo una complessità di formule inferiore (una somma è più economica di un rapporto tra un prodotto e una somma). Il numero di calcoli previsto e la loro complessità definisce il ***costo computazionale*** di un metodo risolutivo. Due strategie possono risultare convenienti allo stesso tempo in quanto comportano lo stesso costo computazionale.

Vogliamo sottolineare che non esiste un modo univoco di determinare la strategia migliore. Esistono delle strade equivalenti ed esistono anche delle preferenze personali che derivano dalla predisposizione che ognuno di noi sente per utilizzare alcuni strumenti anziché altri. Pertanto, quanto descritto in questo paragrafo può rappresentare un orientamento alla soluzione dei problemi. Ciò che è importante, lo sottolineiamo, è diventare consapevoli di tutti gli aspetti del problema da risolvere. È importante, dal nostro punto di vista, entrare in "contatto" con il problema e solo allora risolverlo!

In letteratura scientifica, sulle teorie dell'apprendimento nell'ambito universitario si possono trovare numerosi contributi nei quali si descrivono esperienze nelle quali la capacità di apprendimento ed il rendimento accademico sono migliorati favorendo la

[11] Spesso si tende a "buttarsi" nel primo algoritmo risolutivo che individuiamo senza fare alcuna analisi preventiva.

[12] Per "passo" intendiamo la scrittura e la soluzione di una formula analitica.

consapevolezza del problema e dell'oggetto di studio (Bush, 2011; Zajonc, 2013.)[13]. Si veda ad esempio, nell'ambito del management education, Kuechler & Stedham (2018)[14].

Nel prossimo esercizio vedremo un esempio pratico.

10.1 Esercizio: la soluzione di un circuito resistivo

Vogliamo risolvere il seguente problema:
calcolare la corrente i_2 e la tensione v_3 del circuito di Fig. 4.64.
Per prima cosa osserviamo il circuito. Questo passo è molto importante ed è molto importante diventare <u>consapevoli</u> del problema che stiamo per risolvere in tutti i suoi aspetti. Al contrario si cade nell'automatismo dell'utilizzo del primo algoritmo risolutivo che si individua senza fare alcuna analisi preventiva.
Osservando il circuito possiamo notare che, al fine del calcolo delle grandezze richieste, possiamo preventivamente sostituire un resistore equivalente al parallelo del resistore di 1Ω con la serie del resistore di 1Ω con quella di 3Ω come abbiamo fatto nella Fig. 4.65.
Per risolvere il problema assegnatoci relativo al circuito di Fig. 4.65 possiamo utilizzare diverse strategie risolutive:

1) 1) scrivere il sistema circuitale di 4 equazioni in 4 incognite, 2) risolvere il sistema di equazioni trovando due della 4 incognite,
2) 2) calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore di corrente, 2) calcolare la tensione v_3 come prodotto della corrente del generatore per la resistenza equivalente, 3) dividere la tensione v_3 per la resistenza equivalente serie (4/5Ω + 1 Ω) per ottenere la corrente i_2,
3) 1) utilizzare un partitore di corrente tra la resistenza di 2Ω e la serie della resistenza di 4/5 Ω e quella di 1 Ω per ottenere la corrente i_2, 2) moltiplicare la

---

[13] Bush, M. (2011). Mindfulness in Higher Education. *Contemporary Buddhism*, *12*(1), 183-197. DOI:10.1080/14639947.2011.564838); Zajonc, A. (2013). *Contemplative pedagogy: A quiet revolution in higher education*. New Directions for Teaching and Learning, 2013(134), 83-94.

[14] Kuechler, W., & Stedham, Y. (2018). Management education and transformational learning: The integration of mindfulness in an MBA course. *Journal of Management Education*, *42*(1), 8-33. DOI:10.1177/1052562917727797

corrente i_2 per la resistenza equivalente serie (4/5 Ω e 1 Ω) per ottenere la tensione v_3.

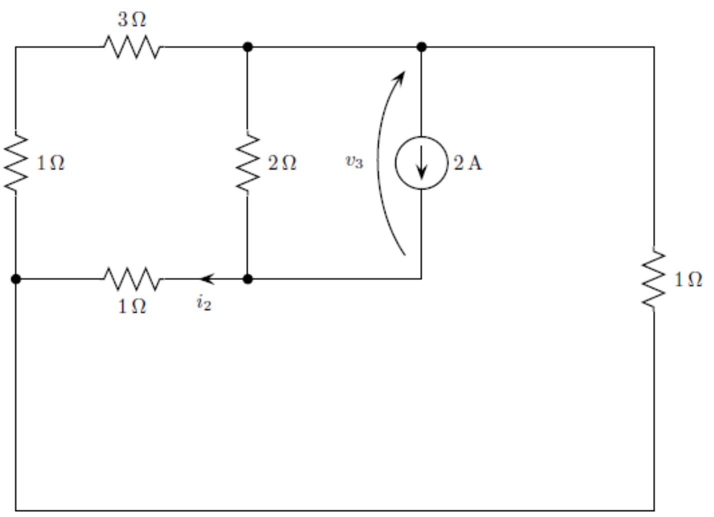


Fig. 4.64 – Circuito da risolvere.

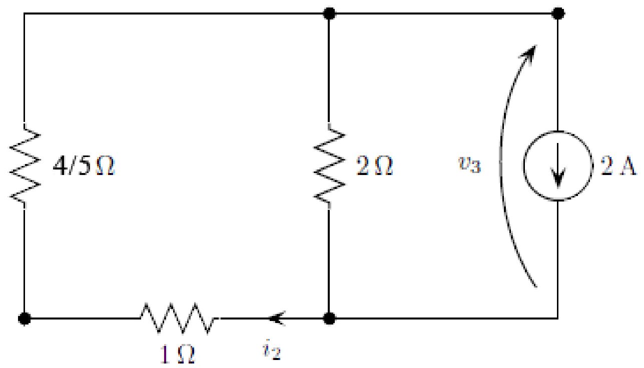


Fig. 4.65 – Circuito equivalente a quello di Fig. 4.64.

Esistono altri metodi risolutivi? Quale è la scelta più efficiente?

Tra quelle indicate, possiamo osservare che il primo metodo e il terzo consistono di 2 passi, tuttavia il primo metodo comporta la scrittura di un sistema di 4 equazioni e, nel secondo passo, la soluzione del sistema per sostituzioni. Pertanto, possiamo stimare il terzo metodo migliore del primo. Il secondo metodo consiste di 3 passi. In conclusione, possiamo stimare il terzo metodo quello più conveniente[15].

Lasciamo per esercizio la procedura risolutiva, dando la soluzione:

$$i_2 = \frac{20}{19}\,\mathrm{A}\ ;\ v_3 = -\frac{36}{19}\,\mathrm{V} \tag{4.119}$$

10.2 Esercizio: la soluzione di un circuito resistivo

Vogliamo risolvere il seguente problema:

calcolare la corrente i_3 e la tensione v_5 del circuito di Fig. 4.66.

Per prima cosa osserviamo il circuito.

Osservando il circuito possiamo notare che, al fine del calcolo delle grandezze richieste, non contribuiscono il parallelo del resistore di 1Ω con la batteria di 3V e pertanto il circuito di Fig. 4.66 può essere sostituito da quello equivalente di Fig. 4.67. Sottolineiamo che l'equivalenza sussiste rispetto alle grandezze i_3 e v_5. Il problema assegnatoci è diventato, in questo modo, molto più semplice! Osserviamo quanto sia importante fare un'analisi preventiva del sistema da studiare allo scopo di semplificare il problema da risolvere. Basta diventare consapevoli del sistema da studiare e trovare delle possibili semplificazioni prima di buttarsi in una soluzione guidata da un automatismo.

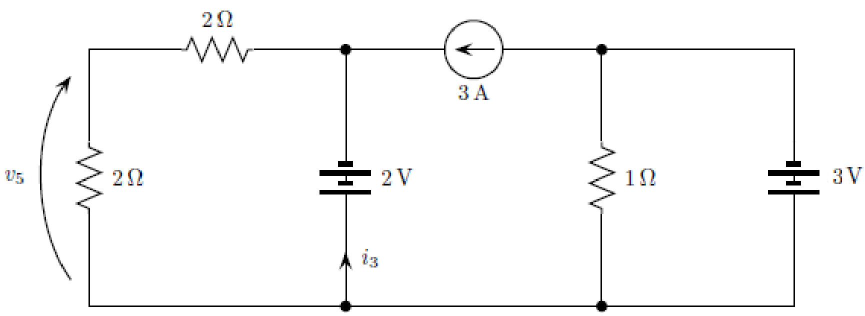


Fig. 4.66 – Circuito da risolvere.

[15] Nel caso di esercizi di banali come questo in questione, i costi computazionali dei vari metodi risolutivi facilmente si equivalgono. Abituiamoci tuttavia ad affrontare i problemi da risolvere con questo approccio perché questo ci forma ad affrontare problemi più complessi nell'ambito dei circuiti, dei nostri studi e in generale della nostra vita.

La soluzione a questo punto è immediata e non serve individuare le possibili strategie risolutive. Scrivendo l'equazione alla maglia in cui sono presenti i due resistori, oppure considerando il partitore di tensione tra le due resistenze (ci sono due strade quindi), si ha:

$$v_5 = -1\text{V} \tag{4.120}$$

Poi dividendo la tensione v_5 per la resistenza di 2Ω si ottiene la corrente nella serie dei resistori e infine, scrivendo l'equazione di uno dei due nodi figura si ha:

$$i_3 = -\frac{7}{2}\text{A} \tag{4.121}$$

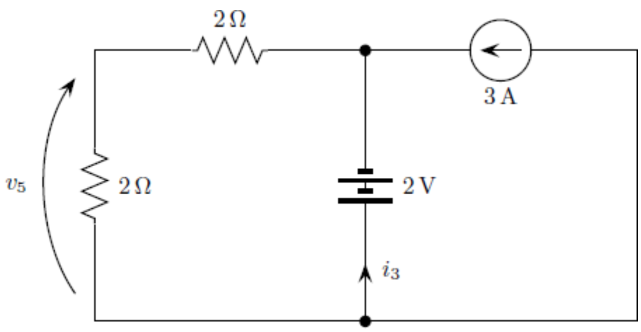


Fig. 4.67 – Circuito equivalente al circuito di Fig. 4.66 ai fini del calcolo delle grandezze richieste dal problema.

Indice delle figure

Domande

Teoria

I circuiti a-dinamici e circuiti a regime stazionario

4.1. Cosa è un circuito dinamico a regime stazionario?

4.2. Quale è la differenza tra un circuito a regime stazionario e un circuito a-dinamico?

4.3. Che differenza c'è tra circuito a-dinamico e circuito resistivo?

4.4. Quale è la differenza tra circuito a-dinamico e dinamico?

4.5. Quando, in generale in un circuito dinamico, si può osservare un regime stazionario?

4.6. Come si comportano i bipoli dinamici in un circuito dinamico a regime stazionario?

Il principio di equivalenza

4.7. Cosa si intende per principio di equivalenza tra due sotto-circuiti?

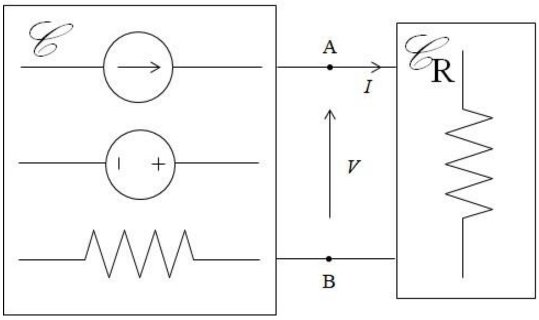
4.8. Quali tra le seguenti definizione è corretta riguardo l'equivalenza tra due bipoli?

4.9. In quale dei seguenti strumenti di analisi dei circuiti a–dinamici si utilizza il principio di equivalenza?

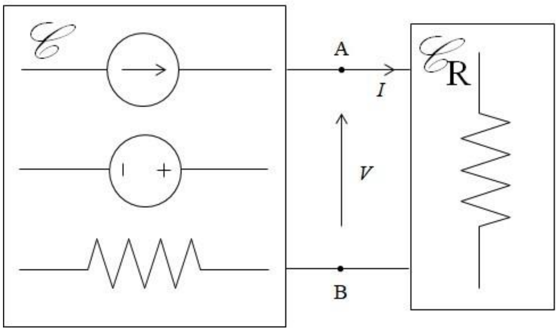
La resistenza equivalente

4.10. Che significato ha l'aggettivo "equivalente" della resistenza equivalente di un sotto-circuito resistivo?

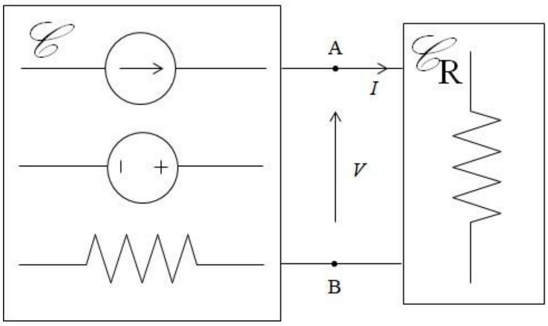
4.11. Dato il circuito di figura, è possibile calcolare la resistenza equivalente del circuito *C*?



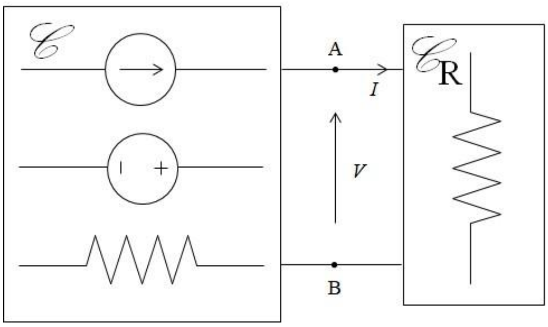
4.12. Dato il circuito di figura, è possibile calcolare la resistenza equivalente del sotto-circuitoC_R?



4.13. Dato il circuito di figura, da cosa dipende la resistenza equivalente del sotto-circuitoC_R?



4.14. Dato il circuito di figura, come si calcola la resistenza equivalente del sotto-circuitoC_R?



4.15. Dato il circuito di figura, da cosa dipende la resistenza equivalente del sotto-circuito C_R?

La resistenza serie e parallelo

4.16. Date due resistenza in serie R_1, R_2, quale è la formula della resistenza equivalente R_{eq}?

4.17. Date due resistenza in parallelo R_1, R_2, quale è la formula della resistenza equivalente R_{eq}?

4.18. Dati tre resistenze in serie (R_1, R_2, R_3) quale delle seguenti formule restituisce la resistenza equivalente serie R_{eq}?

4.19. Dati tre bipoli di resistenza R_1, R_2, R_3 in parallelo quale delle seguenti formule restituisce la resistenza equivalente parallelo R_{eq}?

I partitori di tensione e di corrente

4.20. Quando è possibile utilizzare il partitore di tensione tra due resistenze R_1, R_2?

4.21. Quando è possibile utilizzare il partitore di corrente tra due resistenze R_1, R_2?

4.22. Quando NON è possibile utilizzare il partitore di tensione tra due bipoli?

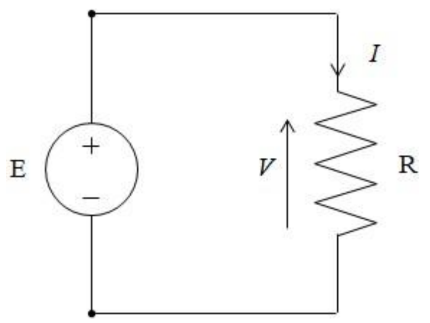
4.23. Quando NON è possibile utilizzare il partitore di corrente tra due bipoli?

4.24. Date due resistenze R_1, R_2 quale delle seguenti formule corrisponde ad un partitore di tensione?

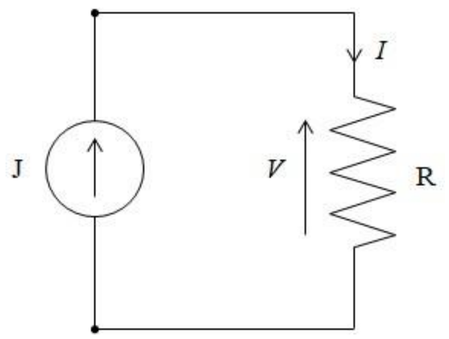
4.25. Date due resistenze R_1, R_2 quale delle seguenti formule corrisponde ad un partitore di corrente?

I circuiti resistivi con un generatore

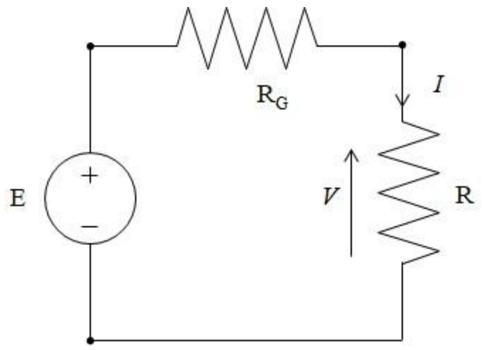
4.26. Qual è l'espressione della corrente *I* in funzione di E e R per il circuito di figura?



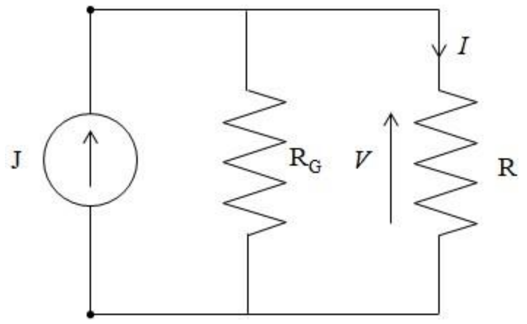
4.27. Qual è l'espressione della tensione *V* in funzione di J e R per il circuito di figura?



4.28. Qual è l’espressione della corrente *I* e della tensione *V* in funzione di E, R e R_G per il circuito di figura?



4.29. Qual è l’espressione della corrente *I* e della tensione *V* in funzione di J, R e R_G per il circuito di figura?



4.30. Cosa si intende per retta di carico di un circuito resistivo con un unico generatore?

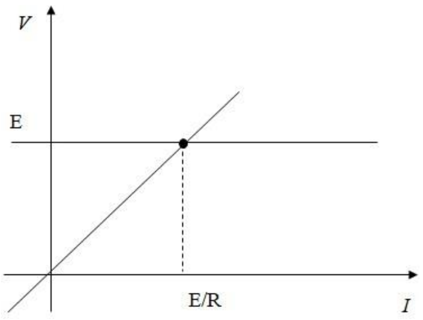
Il grafico del piano I,V e il punto di lavoro del circuito

4.31. Cosa si intende per punto di lavoro di un circuito resistivo costituito da un'unica resistenza alimentata da un generatore ideale di corrente (tensione)?

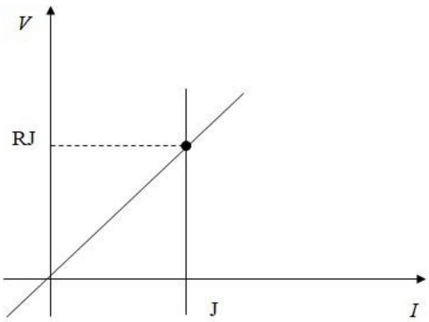
4.32. Cosa si intende per punto di lavoro di un circuito resistivo costituito da un'unica resistenza alimentata da un generatore reale di corrente (tensione)?

4.33. Cosa rappresenta nel piano *I*-*V* il punto di lavoro di un circuito lineare in regime stazionario?

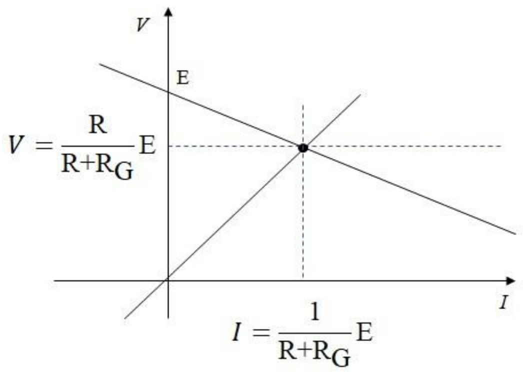
4.34. Che circuito rappresenta il grafico di figura?



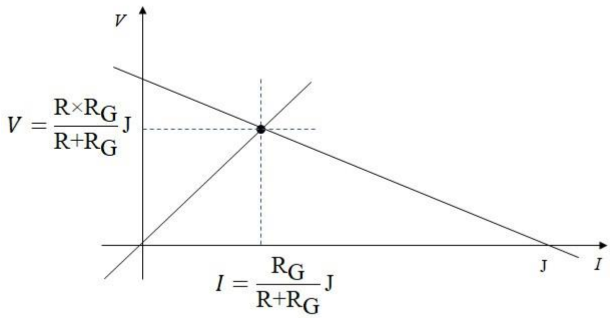
4.35. Che circuito rappresenta il grafico di figura?



4.36. Che circuito rappresenta il grafico di figura?



4.37. Che circuito rappresenta il grafico di figura?



Il principio di sovrapposizione degli effetti

4.38. Come si applica il principio di sovrapposizione degli effetti in un circuito lineare con due generatori?

4.39. Come è possibile calcolare una qualsiasi grandezza di un circuito lineare avente due generatori?

4.40. Per applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, come si opera, sul circuito lineare, per spegnere un generatore alla volta?

4.41. Per quale tipo di circuiti, è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti?

4.42. Cosa si intende per “circuito ausiliario” di un circuito?

La serie e il parallelo di generatori ideali

4.43. È ammissibile all’analisi un circuito con due generatori di corrente in serie?

4.44. È ammissibile all’analisi un circuito con due generatori di tensione in parallelo?

4.45. È possibile progettare un circuito con un generatore di tensione ed uno di corrente in serie?

4.46. È possibile progettare un circuito con un generatore di tensione ed uno di corrente in serie?

4.47. Quanto vale la tensione di una serie di un generatore di tensione ed uno di corrente?

4.48. Quanto vale la corrente di una serie di un generatore di tensione ed uno di corrente?

4.49. Quanto vale la tensione di un parallelo di un generatore di tensione ed uno di corrente?

4.50. Quanto vale la corrente di un parallelo di un generatore di tensione ed uno di corrente?

La trasformazione stella – triangolo

4.51. Data una stella di resistenze con resistenze R_1, R_2 e R_3, si vuole sapere quale delle seguenti formule ci restituisce la resistenza R_{12} del triangolo equivalente:

4.52. Dato un triangolo di resistenze con resistenze R_{12}, R_{23} e R_{31}, si vuole sapere quale delle seguenti formule ci restituisce la resistenza R_1 della stella equivalente:

4.53. Cosa è il centro stella di una stella di resistenze?

4.54. Come è possibile trovare le relazioni che trasformano la stella in un triangolo, e viceversa, ad essa equivalente?

4.55. Quando risulta necessario operare la trasformazione stella-triangolo?

4.56. Quando una stella di resistenze equivale ad un triangolo di resistenze?

La formula di Millmann

4.57. Quali dei seguenti espressioni si potrebbe riferire alla formula di Millmann:

4.58. In presenza di quale dei seguenti bipoli non ha senso utilizzare il teorema di Millmann per calcolare la tensione tra due morsetti A–B?

4.59. A cosa serve la formula di Millmann?

4.60. Come si perviene alla formula di Millmann?

4.61. Quando è possibile applicare la formula di Millmann?

La potenza in un circuito adinamico

4.62. Quale delle seguenti è la corretta espressione della potenza di un bipolo in regime adinamico?

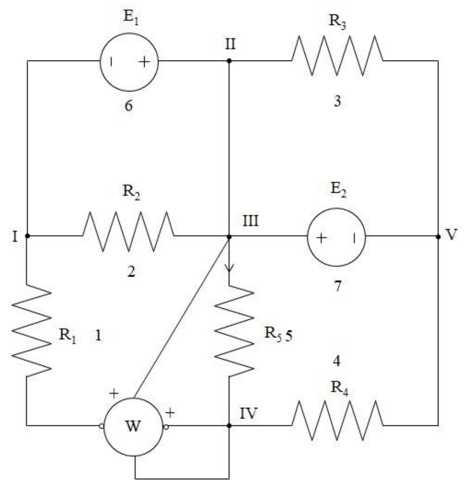
4.63. Quale delle seguenti è la corretta espressione della potenza di un resistore in regime adinamico?

4.64. Per verificare il teorema di Tellegen come dobbiamo scegliere le convenzioni sui bipoli?

4.65. Quale, tra i seguenti, è un corretto enunciato del teorema di Tellegen?

4.66. Cosa può misurare un wattmetro inserito in un circuito?

4.67. Cosa misura il wattmetro di figura?



Il problem solving nei circuiti elettrici

4.68. Cosa si intende per problem shaping nell'ambito dell'analisi dei circuiti elettrici?

4.69. Cosa si intende per problem solving nell'ambito dell'analisi dei circuiti elettrici?

4.70. Cosa si intende per costo computazionale di una strategia risolutiva di un problem solving di circuiti elettrici?

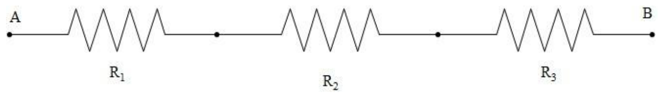
4.71. In base a quale parametro scegliamo una strategia di soluzione di un esercizio piuttosto che un'altra?

Esercizi

Quando indicato dalla presenza del simbolo @ si tratta di esercizi risolti presi dal sito: https://autocircuits.org/autocir_home.html. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi. Quando trovate il simbolo @, vuol dire che è possibile utilizzare il sito per la tipologia di esercizi che si stanno risolvendo.

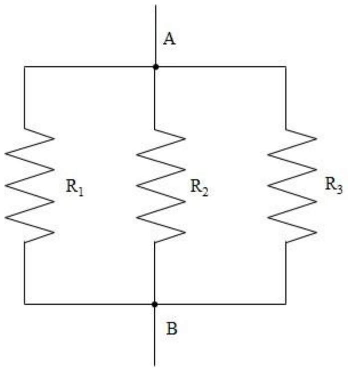
La resistenza e la conduttanza equivalente

4.72. Calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dai morsetti A-B di figura.
(R_1=1 Ω, R_2=3 Ω, R_3= 2 Ω)



4.73. Calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dai morsetti A-B di figura

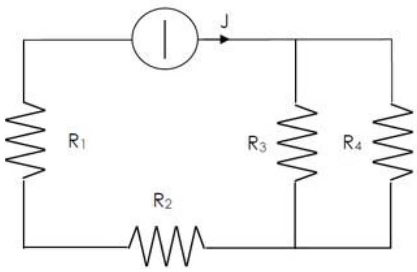
(R_1=1 Ω, R_2=3 Ω, R_3=2 Ω)



4.74. Calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dal generatore J di figura

(R_1 =3 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=6 Ω, R4=6 Ω)

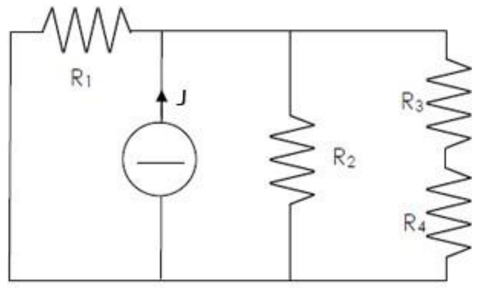
R_{eq} = 9 Ω



4.75. Calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dal generatore J di figura

(R_1=1 Ω, R_2=4 Ω, R_3=2 Ω, R_4=2 Ω)

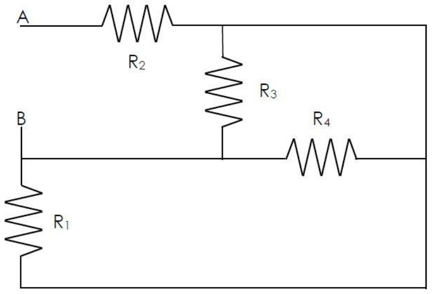
R_{eq} = 2/3 Ω



4.76. Calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dai morsetti AB

(R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=2 Ω, R4=4 Ω)

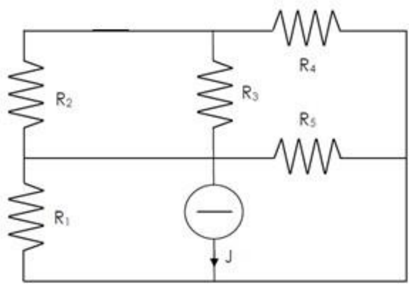
R_{eq}=25/7 Ω



4.77. Calcolare la resistenza equivalente vista dalla resistenza R_5 quando spegniamo il generatore di corrente.

(J=10A, R_1 =2 Ω, R_2 =8 Ω, R_3=8 Ω, R_4=6 Ω, R_5=6 Ω)

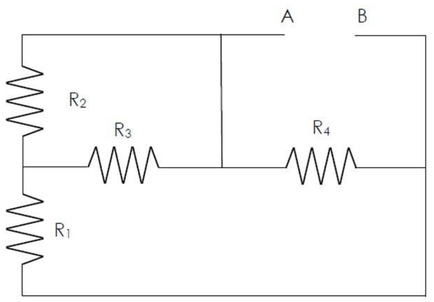
R_{eq} =5/3 Ω



4.78. Calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dai morsetti A-B di figura

(R_1=1 Ω, R_2=3 Ω, R_3= 3 Ω, R_4= 2 Ω, R_5= 2 Ω)

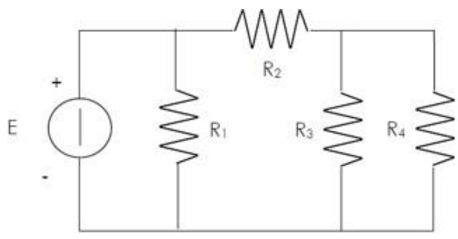
G_{eq} =9/10 Ω^{-1}



4.79. Calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dal generatore E di figura

(R_1 =2 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=3 Ω, R4=3 Ω)

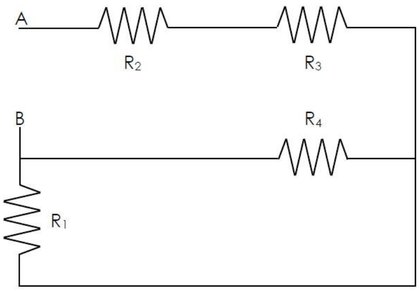
R_{eq} = 18/13 Ω



4.80. Calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dai morsetti A-B di figura

(R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=2 Ω, R4=2 Ω)

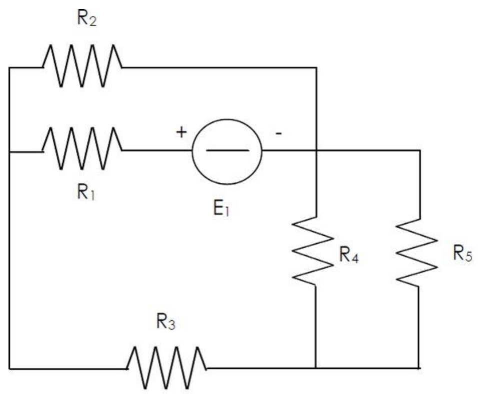
G_{eq} =3/17



4.81. Calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dal generatore E di figura

(R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=2 Ω, R_4 =2 Ω, R_5 =3 Ω)

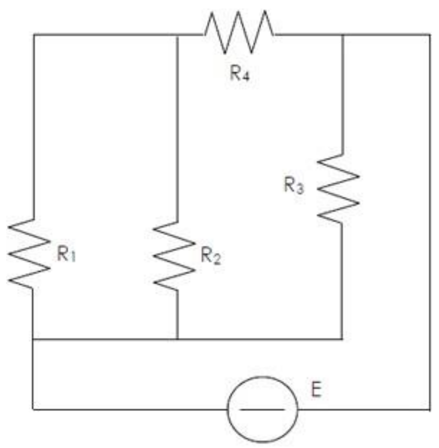
R_{eq} =79/31 Ω



4.82. Calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dal generatore E di figura

(R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=2 Ω, R4=2 Ω)

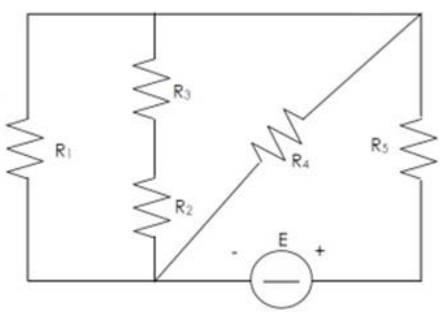
G_{eq} = 19/22



4.83. Calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dal generatore E di figura

(R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=2 Ω, R_4 =4 Ω, R_5 =1 Ω):

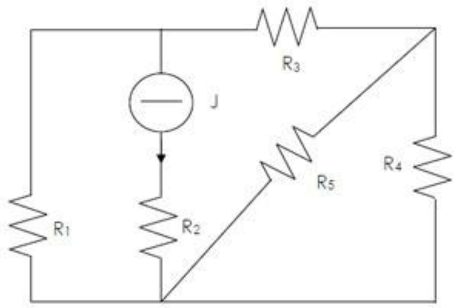
R_{eq} = 49/29 Ω



4.84. Calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dal generatore J di figura

(R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=2 Ω, R_4 =4 Ω, R_5 =3 Ω):

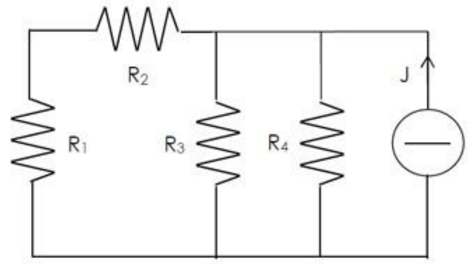
G_{eq} = 33/125 Siemens



4.85. Calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dal generatore J di figura

(R_1 =10 Ω, R_2 =10 Ω, R_3=10 Ω, R4=10 Ω)

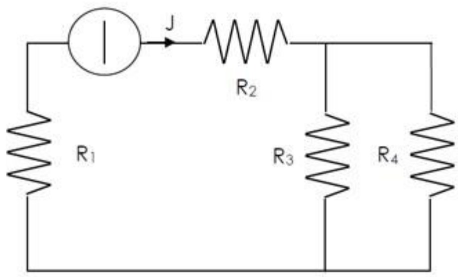
G_{eq} = 0,25 Ω^{-1}



4.86. Calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dal generatore J di figura

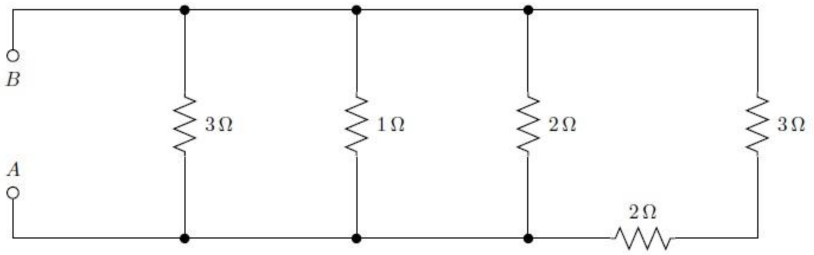
(R_1 =2 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=3 Ω, R4=3 Ω)

G_{eq} = 2/13 Ω



4.87. @ Calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dai terminali A-B di figura.

R_{eq}= 30/61Ω

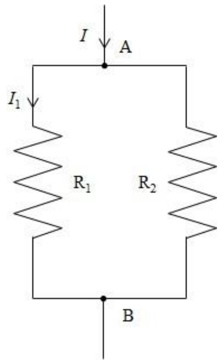


I partitori di tensione e di corrente

4.88. Utilizzando il partitore di corrente calcolare la corrente I_1 nel resistore R_1 partendo dalla conoscenza della corrente I.

(I=3A, R_1 =10 Ω, R_2 =20 Ω)

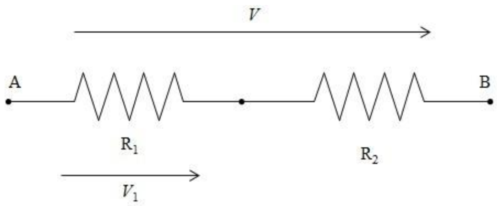
I_1=2 A



4.89. Utilizzando il partitore di tensione calcolare la tensione V_1 sul resistore R_1 partendo dalla conoscenza della tensione V

(V=10V, R_1 =10 Ω, R_2 =20 Ω)

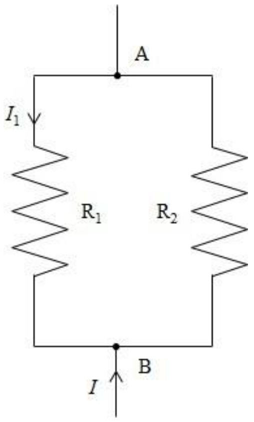
V_1=10/3 V



4.90. Utilizzando il partitore di corrente calcolare la corrente I_1 nel resistore R_1 partendo dalla conoscenza della corrente I.

(I=6A, R_1 =10 Ω, R_2 =20 Ω)

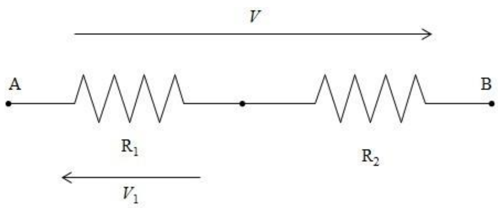
I_1= −4 A



4.91. Utilizzando il partitore di tensione calcolare la tensione V_1 sul resistore R_1 partendo dalla conoscenza della tensione V

(V=5V, R_1 =10 Ω, R_2 =20 Ω)

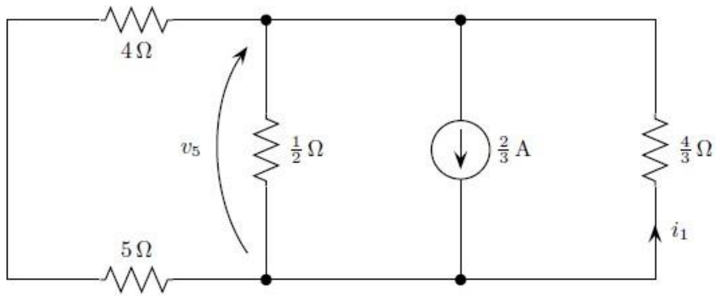
V_1= –5/3 V



Circuiti con un generatore

4.92. @ Calcolare la tensione V_5 e la corrente I_1 del circuito di figura.

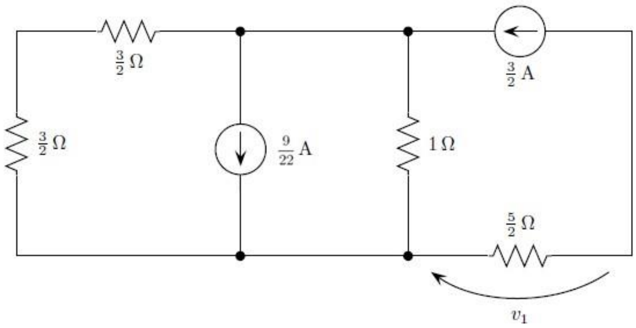
V_5= –0,233 V, I_1= 0,175A



Circuiti con più generatori

4.93. @ Calcolare tensione v_1 e la corrente I del resistore di 1 Ω del circuito di figura.

v_1= 15/4V; i= 9/11A

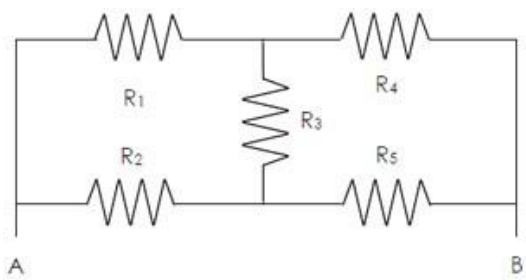


La trasformazione stella – triangolo

4.94. Utilizzando la trasformazione stella-triangolo calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dai morsetti A-B

(R_1 =3 Ω, R_2 =2 Ω, R_3=3 Ω, R_4 =5 Ω, R_5 =5 Ω)

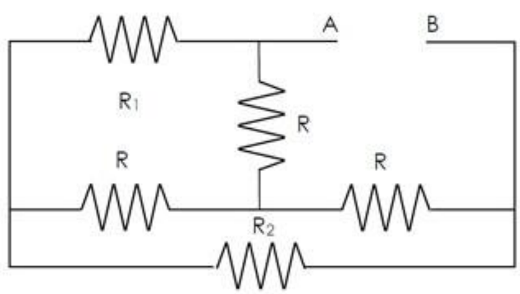
R_{eq} = 4 Ω



4.95. Utilizzando la trasformazione stella-triangolo calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dai morsetti A-B

(R_1=6 Ω, R_2=6 Ω, R=2 Ω)

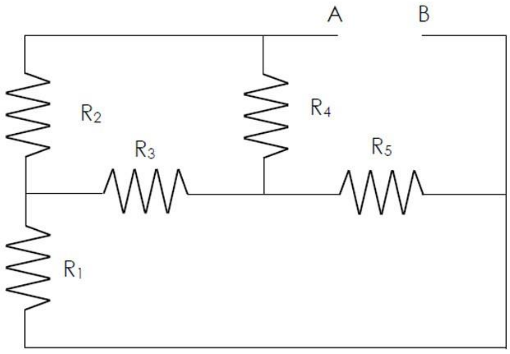
G_{eq} = 1/3 Ω^{-1}



4.96. Utilizzando la trasformazione triangolo-stella calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dai morsetti AB

(R_1 =2 Ω, R_2 =2 Ω, R_3=2 Ω, R_4 =2 Ω, R_5 =2 Ω)

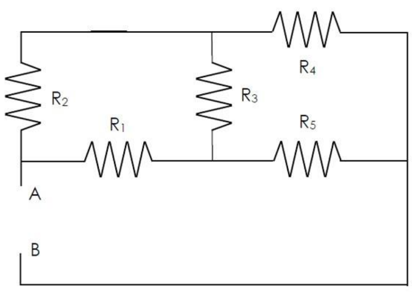
R_{eq} =2 Ω



4.97. Utilizzando la trasformazione stella-triangolo calcolare la resistenza equivalente R_{eq} vista dai morsetti AB

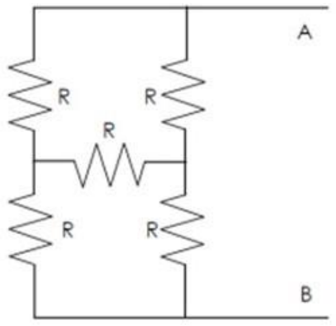
(R_1 =1 Ω, R_2 =1 Ω, R_3=2 Ω, R_4 =2 Ω, R_5 =2 Ω)

R_{eq} =3/2 Ω



4.98. Utilizzando la trasformazione stella-triangolo calcolare la conduttanza equivalente G_{eq} vista dai morsetti A-B (R=2 Ω)

G_{eq} = 1/2 Ω^{-1}

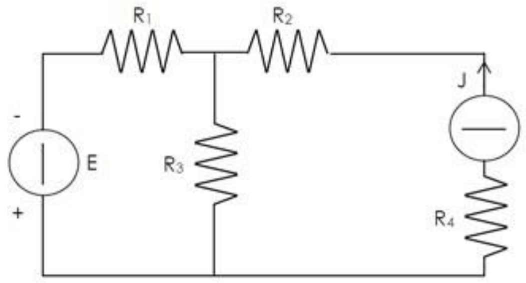


La formula di Millmann

4.99. Utilizzare la formula di Millmann per calcolare il valore assoluto della tensione V della resistenza R_3:

(E=10V, J=5A, R_1 =2 Ω, R_2=5 Ω, R_3=10 Ω, R_4 =10 Ω)

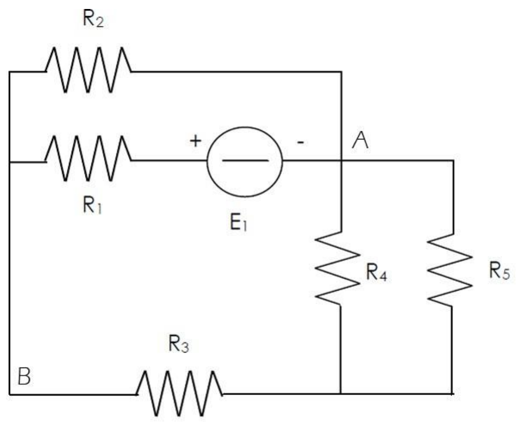
V = 0 V



4.100. Utilizzare la formula di Millmann per calcolare la tensione V_{AB}

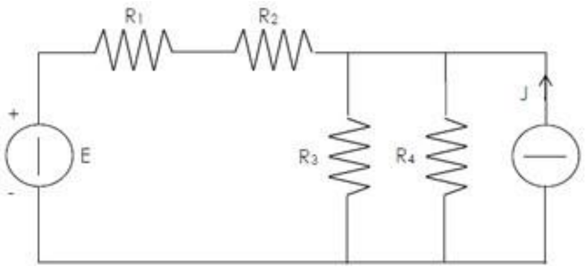
(E=3V, R_1 =1 Ω, R_2 =1 Ω, R_3 =1 Ω, R_4 =2 Ω, R_5 =2 Ω)

V_{AB}=-6/5 V



4.101. Utilizzare la formula di Millmann per calcolare il valore assoluto V_1 della tensione sulla resistenza R_1: (E=2V, J=3A, R_1 =1 Ω, R_2 =1 Ω, R_3 =4 Ω, R_4 =4 Ω):

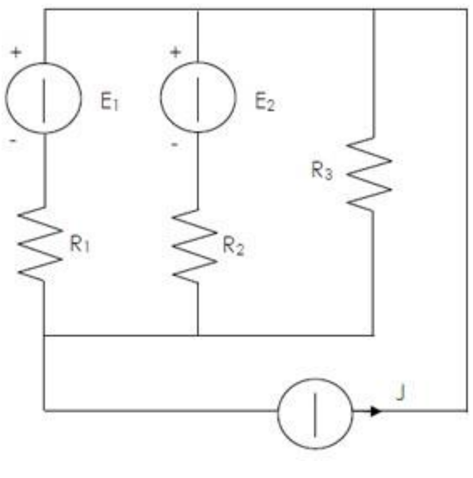
V_1 = 1



4.102. Utilizzare la formula di Millmann per calcolare il valore assoluto della tensione *V* ai capi della resistenza R_3:

(E1=10V, E2=10V, J=3A, R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=2 Ω):

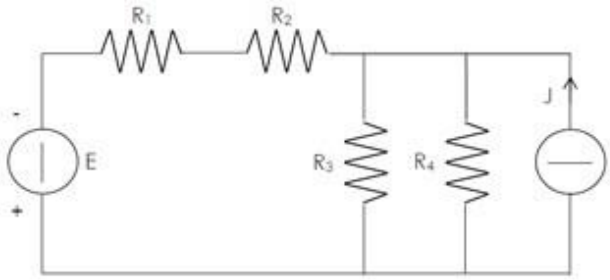
V = 98/11 V



4.103. Utilizzare la formula di Millmann per calcolare il valore assoluto della tensione V_3 della resistenza R_3:

(E=5V, J=2A, R_1 =2 Ω, R_2 =3 Ω, R_3 =10 Ω, R_4 =10 Ω):

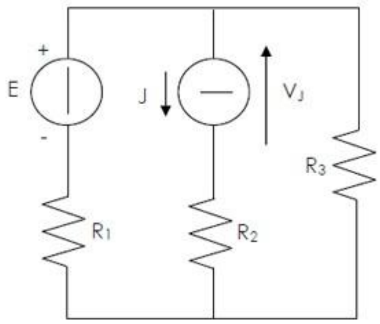
V_3 = 5/2 V



4.104. Partendo dalla formula di Millmann e calcolare il valore della tensione V_J ai capi del generatore di corrente:

(E=10V, J=3A, R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3 =2 Ω):

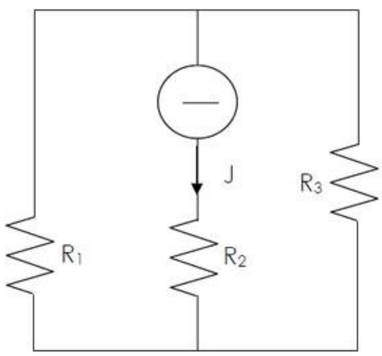
$V_J = -13/3$



4.105. Utilizzare la formula di Millmann per calcolare il valore assoluto della tensione V ai capi della resistenza R_3:

(J=10A, R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=2 Ω):

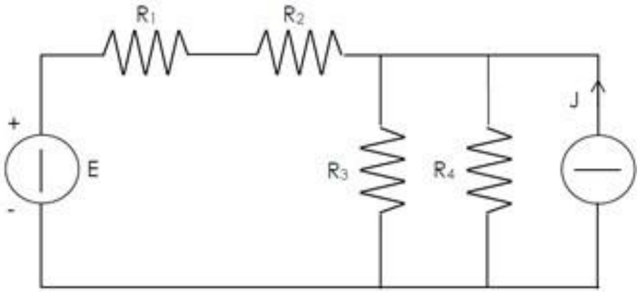
V = 20/3 V



4.106. Utilizzare la formula di Millmann per calcolare il valore assoluto della corrente I_3 che attraversa la resistenza R_3:

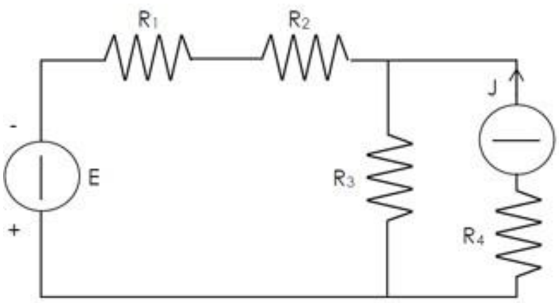
(E=10V, J=1A, R_1 =5 Ω, R_2 =5 Ω, R_3 =5 Ω, R_4 =5 Ω):

I_3 = 4/5 A



4.107. Utilizzare la formula di Millmann per calcolare il valore assoluto della tensione V_1 della resistenza R_1: (E=5V, J=2A, R_1 =5 Ω, R_2 =5 Ω, R_3 =10 Ω, R_4 =10 Ω)

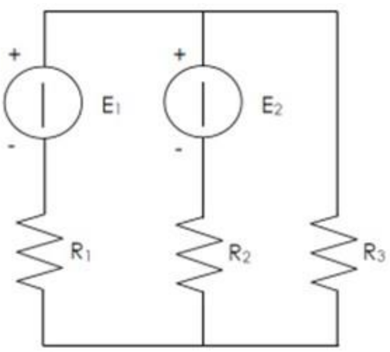
V_1 = 25/4 V



4.108. Utilizzare la formula di Millmann per calcolare la tensione ai capi della resistenza R_3, V:

(E_1=10V, E2=20V, R_1 =1 Ω, R_2 =3 Ω, R_3=2 Ω):

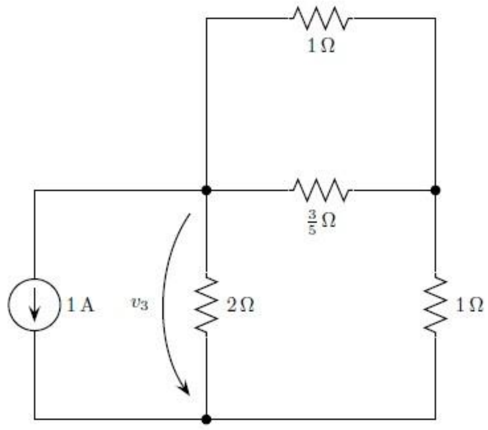
V = 100/11 Volt



Calcolo della potenza in un circuito

4.109. @ Calcolare il valore della potenza P assorbita dal resistore di tensione V_3 di figura.

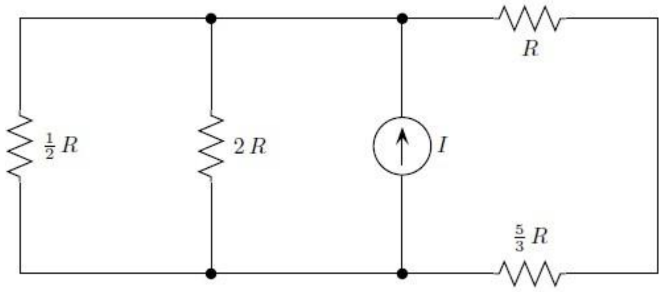
P = 0,33 W



4.110. @ Calcolare il valore del coefficiente R che compare in figura, affinché la potenza erogata dal generatore sia P= 1W.

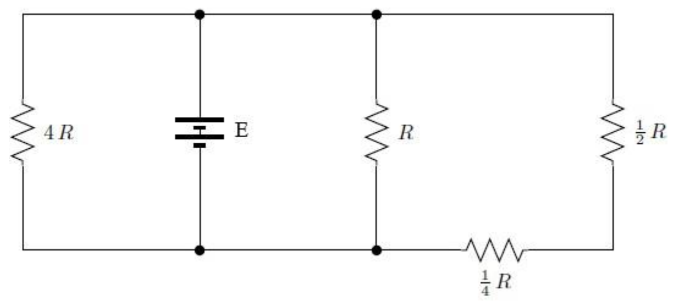
(I = 0,5A)

R = 23/2 Ω



4.111. @ Calcolare il valore della potenza P erogata dal generatore di figura. (E = 1V, R = 3 Ω)

P = 31/36 W

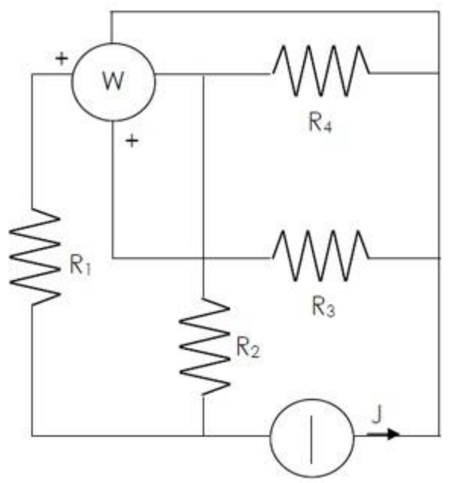


Circuiti con wattmetri

4.112. Calcolare il valore della potenza P misurata dal wattmetro inserito in figura.

(J = 4A, R_1 =2 Ω, R_2 = 2 Ω, R_3 = 2 Ω, R_4 = 2 Ω)

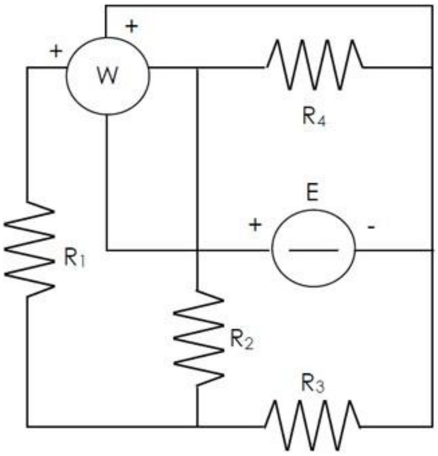
P = 8 W



4.113. Calcolare il valore della potenza W misurata dal wattmetro inserito in figura.

(E = 4V, R_1 =2 Ω, R_2 = 2 Ω, R_3 = 3 Ω, R_4 = 2 Ω)

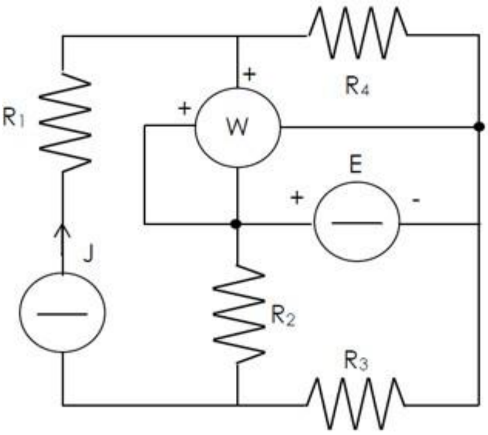
P = 2 W



4.114. Calcolare il valore della potenza P_W misurata dal wattmetro inserito in figura

(E = 8V, J = 12A, R_1 =2 Ω , R2 = 2 Ω , R3 = 3 Ω , R4 = 2 Ω)

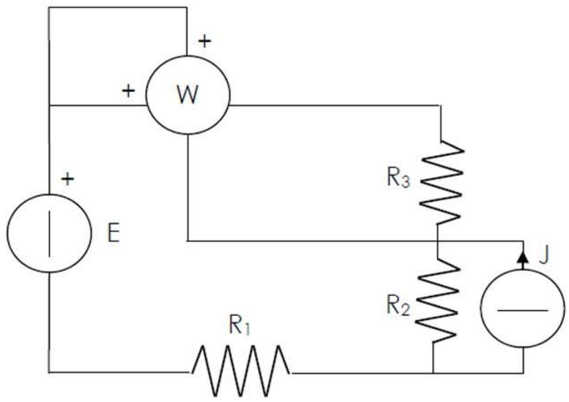
P_W = 32 W



4.115. Calcolare il valore della potenza P_W misurata dal wattmetro inserito in figura

(J=10A, E=10V, R_1=1Ω, R_2=3Ω, R_3=2Ω)

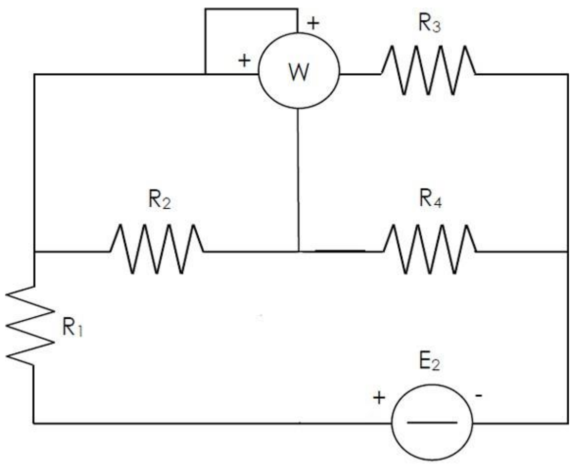
P_W =200/9 W



4.116. Calcolare il valore della potenza P_W misurata dal wattmetro inserito in figura

(E=17V, R_1=1 Ω, R_2=3 Ω, R_3=2 Ω, R_4=2 Ω)

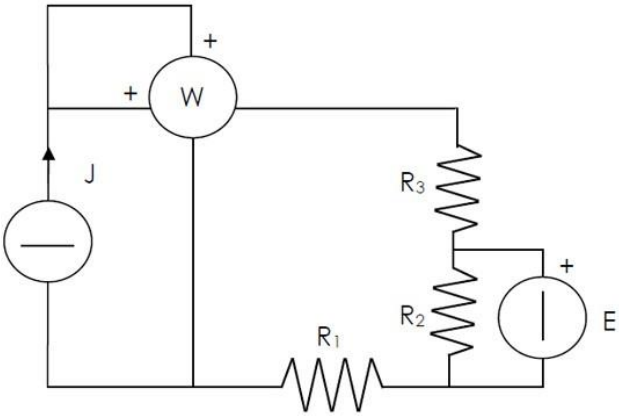
P_W =30W



4.117. Calcolare il valore della potenza P_W misurata dal wattmetro inserito in figura

(J=3A, E=10V, R_1=10 Ω, R_2=30 Ω, R_3=20Ω)

P_W =300W


+
+
W
J
R3
R2
+
E
R1