



Proprietà dei Circuiti

Sommario

1	La soluzione di un circuito elettrico	4
2	Nozioni di topologia circuitale	6
2.1	Il nodo e il lato.....	7
2.2	Il grafo	8
2.3	L'albero e il co-albero	9
2.4	Le maglie di un grafo	10
2.5	Gli insiemi di taglio di un grafo	13
2.6	Il teorema fondamentale dei grafi*.....	16
3	Le leggi di Kirchhoff.....	17
3.1	La I Legge di Kirchhoff.....	18
3.2	La II Legge di Kirchhoff	20
3.3	Il sistema di interconnessione.....	22
3.3.1	Dimostrazione che le LKC forniscono $n-1$ equazioni linearmente indipendenti*.....	24
3.3.2	Dimostrazione che le LKT forniscono $l-(n-1)$ equazioni linearmente indipendenti*.....	26
3.4	Le leggi di Kirchhoff in forma matriciale	27
3.4.1	La matrice d'incidenza e la I legge di Kirchhoff	27
3.4.2	La matrice di un insieme di maglie fondamentali e la II legge di Kirchhoff	30
3.4.3	Il sistema d'interconnessione in forma matriciale	31
4	Il sistema di equazioni circuitali	36
5	Il metodo dei potenziali di nodo.....	39
6	Il metodo delle correnti di maglia.....	40

7	Le proprietà di non amplificazione	42
8	Il teorema di Tellegen	43
	Indice delle figure.....	48
	Domande	50
	Teoria	50
	La soluzione di un circuito elettrico.....	50
	Nozioni di topologia circuitale.....	50
	Leggi di Kirchhoff	53
	La I Legge di Kirchhoff	53
	La II Legge di Kirchhoff	54
	Il sistema di interconnessione	56
	Leggi di Kirchhoff in forma matriciale	56
	La matrice d'incidenza e la I legge di Kirchhoff	56
	La matrice di maglia fondamentale e la II legge di Kirchhoff	58
	Il sistema d'interconnessione in forma matriciale	59
	Il sistema di equazioni circuitali	59
	Il metodo dei potenziali di nodo	60
	Il metodo delle correnti di maglia	60
	Le proprietà di non amplificazione	60
	Teorema di Tellegen	61

1 La soluzione di un circuito elettrico

Cercare la soluzione di un circuito, e quindi conoscere il funzionamento del circuito, vuol dire determinare il valore delle tensioni e delle correnti di ogni bipolo.

Come abbiamo già introdotto nel § 1 della Lezione 1, la soluzione di un circuito dipende da due fattori:

- la natura di ogni bipolo presente nel circuito,
- il modo in cui sono connessi tra loro tutti i bipoli.

Il primo fattore lo abbiamo analizzato nelle prime due lezioni. Abbiamo descritto il funzionamento dei bipoli che utilizzeremo e abbiamo, per ognuno di loro, individuato una relazione funzionale tra la corrente e la tensione del bipolo stesso e tale relazione l'abbiamo chiamata relazione caratteristica del bipolo. Tutte le relazioni caratteristiche dei bipoli presenti nel circuito contribuiranno alla stesura del sistema di equazioni che governa il funzionamento del circuito.

Il secondo fattore riguarda come sono connessi i bipoli presenti nel circuito. Grazie alla definizione di bipolo scriveremo delle equazioni di tipo "topologico". Queste equazioni saranno scritte applicando le Leggi di Kirchhoff che riassumono le condizioni che il sistema elettrico deve soddisfare per essere descritto con un modello circuitale.

Osserviamo che: considerando in generale anche i circuiti dinamici, in cui, cioè, sono presenti elementi dinamici come condensatori e induttori, possiamo introdurre la necessità di specificare lo stato in cui si trova il circuito quando lo cominciamo a studiare. Si tratta delle **condizioni iniziali** del sistema che è necessario conoscere se si vuole determinare l'esatta soluzione del circuito.

In conclusione, le equazioni che governano il funzionamento di un circuito sono:

Le relazioni caratteristiche + Le leggi di Kirchhoff.

La soluzione di tale sistema di equazioni è unica se ad esso aggiungiamo la condizione iniziale che rappresenta lo stato del circuito nell'istante iniziale.

In questa lezione ci occuperemo di introdurre le Leggi di Kirchhoff. Per fare questo è necessario impadronirsi di alcune nozioni che riguardano gli aspetti *topologici*¹ dei circuiti, che sono in generale affrontati nella *teoria dei grafi* introdotta da Eulero e usata da Kirchhoff per enunciare le sue leggi. Vedremo che in questo contesto non ci interesseremo mai di specificare la natura dei bipoli e quindi non faremo mai riferimento alle relazioni caratteristiche degli stessi (vedi Lezione 2).

¹ La *topologia* o studio dei luoghi (dal greco τόπος, *tópos*, "luogo", e λόγος, *lógos*, "studio") è lo studio delle proprietà delle figure e delle forme che non cambiano quando viene effettuata una deformazione senza "strappi", "sovrapposizioni" o "incollature". Il *grafo* è un oggetto topologico studiato con la *teoria dei grafi*. (Wikipedia)

2 Nozioni di topologia circuitale

Cominciamo con il considerare la Fig. 3.1.

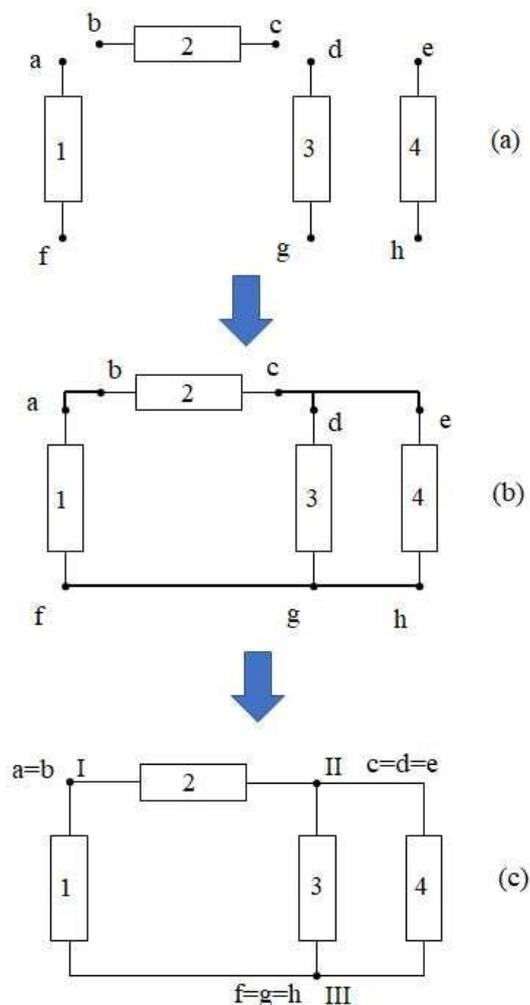


Fig. 3.1 – Connessione di bipoli per la realizzazione di un circuito.

Abbiamo 4 bipoli da connettere (Fig. 3.1a). Per collegare i morsetti tra di loro supponiamo di usare un conduttore ideale che non introduca un effetto resistivo. Nel modello circuitale rappresentiamo tali conduttori ideali con dei segmenti (Fig. 3.1b) che nella figura abbiamo rappresentato di spessore maggiore. Osserviamo che i morsetti a - b , c - d - e , f - g - h “convergono” in un unico costrutto, che come vedremo a breve, chiameremo *nodo* (vedi Fig. 3.1c).

2.1 Il nodo e il lato

In questo paragrafo daremo la definizione di un ente molto utile della teoria dei grafi: il **nodo**.

Definizione di **nodo**: *ente che rappresenta il collegamento di almeno due morsetti.*

Osserviamo che nel circuito della Fig. 3.1 ci sono 3 nodi.

Il nodo, dunque, è il collegamento di almeno due bipoli: ne bastano due collegati come nel caso del nodo A di Fig. 3.2. In riferimento alla figura sia A che B si possono considerare nodi.

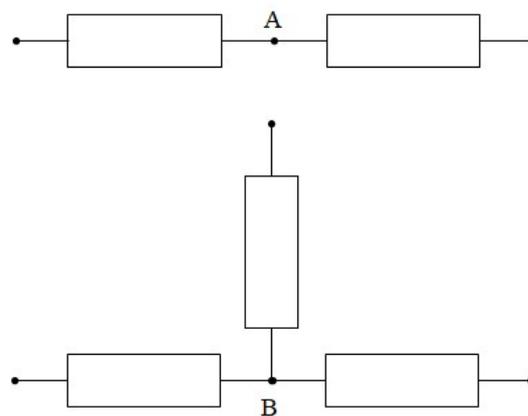


Fig. 3.2 □ Nodo che collega due bipoli (A) e nodo che collega tre bipoli (B).

Per convenzione indicheremo con numeri romani i nodi, come abbiamo fatto nella Fig. 3.1c.

In genere il numero di nodi di un circuito si indica con n . Inoltre la presenza di un nodo si indica con un punto più spesso della grandezza delle linee che indicano i lati. Questo è importante perché quando abbiamo a che fare con un grafo potremmo dedurre un numero di lati maggiore del dovuto se non sono indicati esplicitamente i nodi presenti nel grafo.

Un altro importante ente è il **lato** (detto anche **ramo**).

Definizione di **lato**: *ente corrispondente all'esistenza di un bipolo nel circuito.*

Osserviamo che nel circuito della Fig. 3.1 ci sono 4 lati.

Per convenzione indicheremo con numeri arabi i lati come abbiamo fatto nella Fig. 3.1c.

In genere il numero di lati di un circuito si indica con l .

2.2 Il grafo

Ora introduciamo il grafo e altri enti ad esso collegati e diamo le loro definizioni.

Definiamo il **grafo**, il **sotto-grafo**, il **grafo orientato** di un circuito.

Grafo: lo schema di connessione dei bipoli di un circuito dove per ogni lato abbiamo considerato un semplice segmento.

Un grafo, dunque, è quello di Fig. 3.3a.

Un grafo si dice **grafo connesso** se da qualunque nodo del grafo è possibile raggiungere qualsiasi altro nodo del grafo con un percorso di rami (Fig. 3.3a).

Un grafo si dice **grafo non connesso** nel caso contrario (Fig. 3.3b).

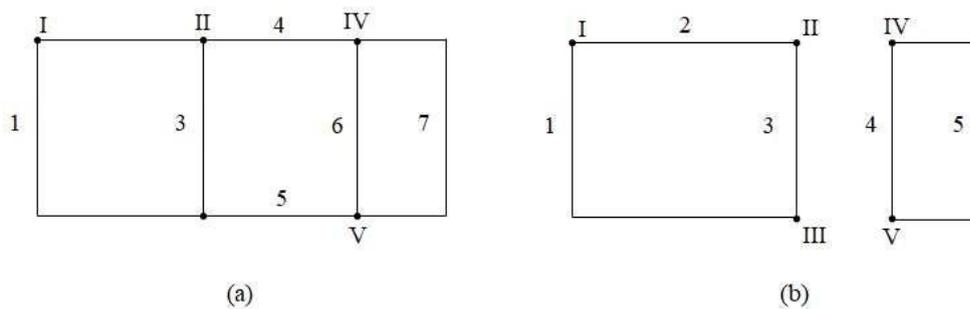


Fig. 3.3 – a: Esempio di grafo connesso; b: Esempio di grafo non connesso

Sotto-grafo: lo schema di connessione di un sottoinsieme di bipoli del grafo di un circuito.

Grafo orientato: il grafo del circuito con un verso indicato in ogni lato.

Per ottenere un grafo orientato a partire da un grafo possiamo ad arbitrio scegliere dei versi per ogni lato oppure possiamo scegliere i versi dei lati come i versi scelti per le correnti del circuito che intendiamo studiare.

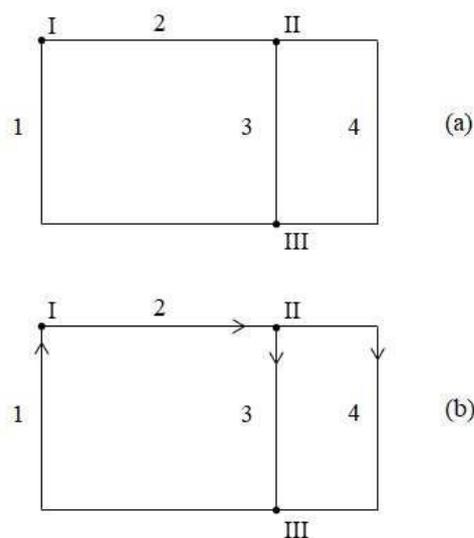


Fig. 3.4 – Un grafo (a) e lo stesso orientato (b).

Osserviamo che due circuiti si dicono topologicamente uguali se hanno lo stesso grafo. Quindi condizione necessaria e sufficiente affinché due circuiti siano topologicamente uguali è che abbiano lo stesso grafo.

2.3 L'albero e il co-albero

A partire dal grafo, definiamo l'**albero** e il **co-albero** che ci aiuteranno nell'introduzione delle Leggi di Kirchhoff (vedi § 3), delle loro caratteristiche e del loro impiego.

Albero: un qualsiasi insieme di lati (un qualsiasi sotto-grafo connesso) del grafo di un circuito che collega tutti i nodi senza chiudere maglie.

Co-albero: insieme di lati complementare a quelli dell'albero rispetto al grafo del circuito.

L'albero ed il co-albero sono particolari sotto-grafi di un circuito. Si osservi che in un circuito, in generale, ci sono più alberi (e quindi co-alberi). Ad esempio, nel grafo di Fig. 3.4a ci sono 5 alberi (5 co-alberi) come si può osservare in a, b, c, d, e della Fig. 3.5.

Mettiamo in evidenza che (vedi § 2.7), dato un grafo di n nodi e l lati, il numero di lati dell'albero è sempre $n-1$, il numero di lati dei co-albero è sempre $l-(n-1)$. In Fig. 3.5, infatti, abbiamo che i lati di albero sono sempre 2 ($3-1=2$) e quelli di co-albero sempre 2 ($4-(3-1)=2$).

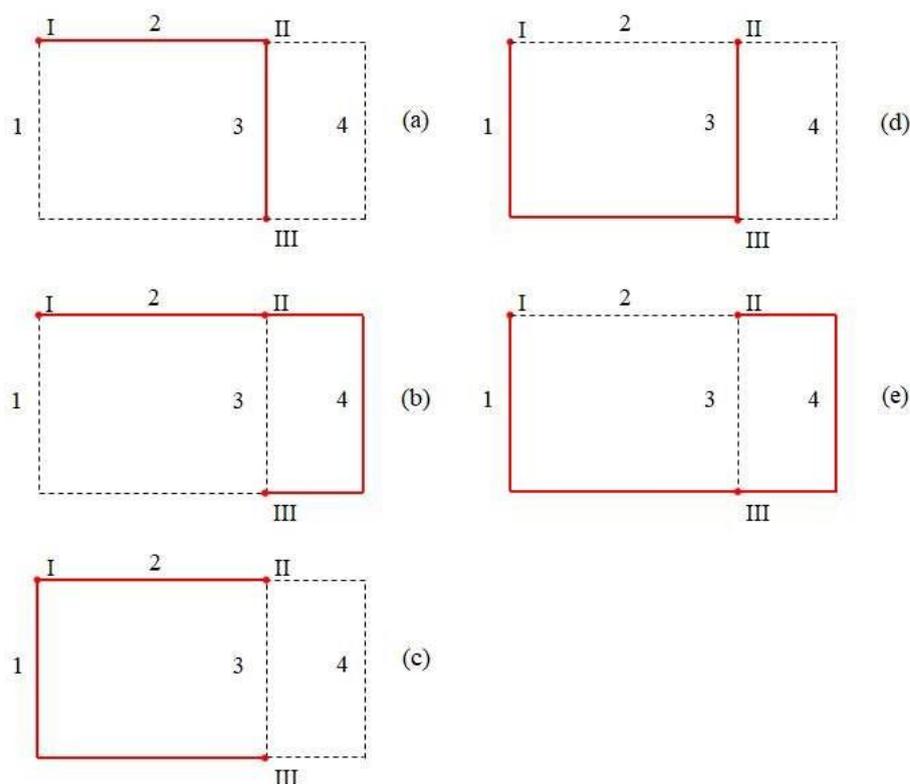


Fig. 3.5 – Tutti i possibili alberi del grafo di Fig. 3.4a (—) e i rispettivi co-alberi (---).

2.4 Le maglie di un grafo

Legato al concetto di lato c'è quello di **maglia**. La maglia è infatti un insieme di lati ed è un sotto-grafo connesso del circuito.

Le maglie ci serviranno per poter enunciare agevolmente la II Legge di Kirchhoff alle tensioni.

Diamo la seguente definizione:

Maglia: dato un grafo connesso, dicesi *maglia* un percorso chiuso costituito da un insieme di lati in modo che in ciascun nodo del percorso incidano due e solo due lati.

In ogni circuito esistono diverse maglie. Per il circuito di Fig. 3.6a, abbiamo rappresentato con linee tratteggiate di differenti colori le tre possibili maglie del circuito di Fig. 3.1: m1, m2 e m3. Nella Fig. 3.6b, le linee tratteggiate che indicano le maglie, hanno una freccia che orienta la percorrenza della maglia sui lati che la costituiscono. In questo caso si parla

di *maglia orientata*. In particolare, nella Fig. 3.6b, abbiamo che la maglia m1 ha verso orario, la maglia m2 ha verso antiorario, la maglia m3 ha verso antiorario. L'orientamento di una maglia è arbitrario. Il fatto di orientare una maglia, come vedremo nel § 3.2, ci è utile quando vogliamo riferirci ad un verso di percorrenza dei bipoli (in particolare relativamente alle tensioni dei bipoli) costituenti la maglia.

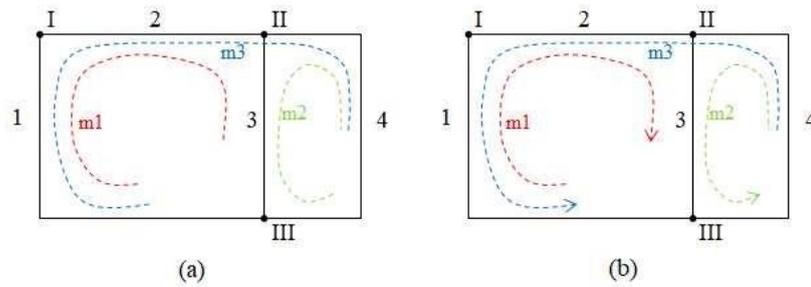


Fig. 3.6 – (a): Esempi di maglie nel circuito di Fig. 3.4a; (b): le relative maglie orientate (arbitrariamente).

Ci si potrebbe chiedere: ma quante maglie ci sono in un circuito? Non è possibile, conoscendo solo il numero di nodi e di lati di un circuito determinare il numero di tutte le maglie esistenti. Tale numero, infatti dipenderà da come i lati sono connessi tra loro. A tale scopo si guardi la Fig. 3.7 e si cerchi di determinare il numero totale di maglie dei due diversi grafi (a) e (b) aventi, però, lo stesso numero di nodi e di lati. È facile verificare che il numero di maglie nei due casi è diverso. Avendo sperimentato, quindi, che, almeno in questo caso, abbiamo un numero complessivo di maglie diverso per due grafi (a) e (b) di Fig. 3.7, possiamo concludere che lo stesso numero di nodi e lati non garantisce lo stesso numero di maglie possibili.

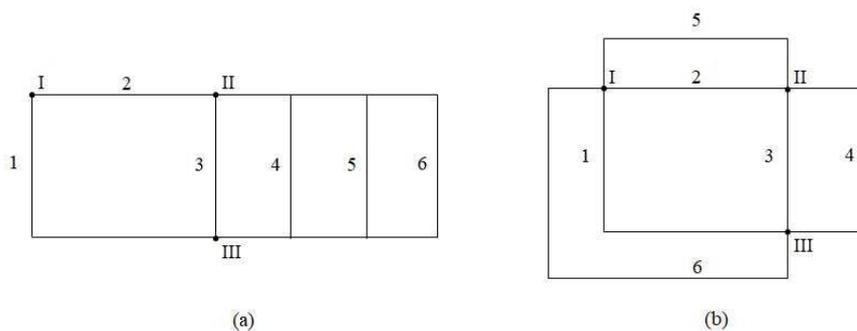


Fig. 3.7 – Due grafi aventi n nodi e l lati. Quante maglie ci sono in ognuno di loro?

Quindi non sappiamo a priori quante maglie ci sono in un circuito. Tuttavia è possibile usare un criterio per individuare, in ogni circuito, un insieme “speciale” di maglie che ha una numerosità pari a $l - (n - 1)$. Questo insieme si individua utilizzando l’albero e il co-albero. Si procede in questo modo:

- Si sceglie un albero a piacere
- Poi con ogni lato del co-albero si chiude una maglia utilizzando di volta in volta il lato di co-albero scelto ed i soli lati dell’albero necessari a formare un percorso chiuso (eliminando i restanti).

Questa maglia così ottenuta, si chiama *maglia fondamentale*. Quante maglie fondamentali è possibile ottenere con questa procedura? Poiché $l - (n - 1)$ sono i lati del co-albero, individueremo un insieme di $l - (n - 1)$ maglie fondamentali. Ad esempio, nel caso del grafo di Fig. 3.4a, con questa procedura, otterremo due maglie fondamentali.

Quali saranno queste maglie? Dipende da quale albero scelgo ovviamente. Sottolineiamo che alberi diversi possono dare luogo allo stesso insieme di maglie come vedremo nel prossimo esempio.

Nella Fig. 3.5 relativa al grafo di Fig. 3.4a, abbiamo 5 alberi. Nella Fig. 3.8 abbiamo mostrato le maglie fondamentali individuate per ogni scelta di albero (ne sono 5). Quindi, ad ogni scelta di albero, abbiamo associato un insieme di maglie fondamentali. Si può notare che nell’esempio esaminato vi sono tre diversi insiemi di maglie fondamentali: $\{m_1, m_2\}$; $\{m_1, m_3\}$; $\{m_2, m_3\}$ (m_1 maglia rossa, m_2 maglia verde, m_3 maglia blu, come in Fig. 3.6). Queste risultano individuate nei casi:

$\{m_1, m_2\}$ casi (a), (d)

$\{m_1, m_3\}$ caso (c)

$\{m_2, m_3\}$ casi (b), (e)

Nell’esempio considerato possiamo dunque affermare che il grafo di Fig. 3.4a, ha tre insiemi di maglie fondamentali la cui numerosità è 2.

Osserviamo che, in relazione ad un albero scelto tra i possibili, ogni maglia non fondamentale si può ottenere come unione² di almeno due maglie fondamentali.

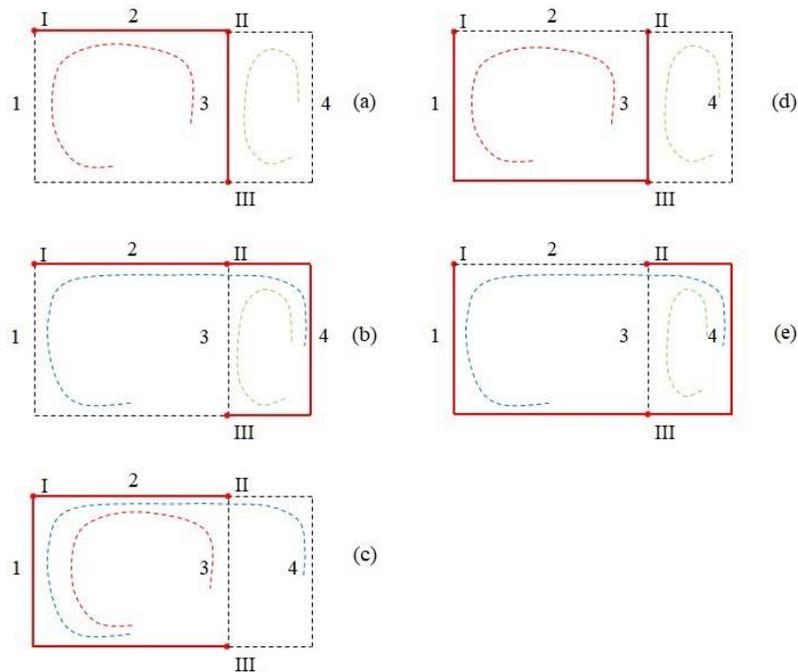


Fig. 3.8 – Maglie relative a tutte le possibili scelte di albero del grafo di Fig. 3.4a.
Maglie fondamentali.

2.5 Gli insiemi di taglio di un grafo

Introduciamo infine un altro ente utile a scrivere la I Legge di Kirchhoff alle correnti:

Insieme di taglio: un sottoinsieme di lati di un grafo connesso costituisce un insieme di taglio se eliminando dal circuito tali lati si ottiene un grafo non connesso mentre se si lascia uno qualsiasi tra i lati dell'insieme di taglio il circuito rimane connesso.

L'insieme di taglio individua un insieme di lati del grafo. Si osservi che anche l'insieme di taglio è un sotto-grafo del circuito. Esistono diversi insiemi di taglio per ogni circuito. Analogamente a quanto detto per le maglie, non possiamo sapere a priori quanti insiemi

² Per “unione” di maglie fondamentali intendiamo la somma delle equazioni derivanti dalla LKT per le maglie fondamentali.

di taglio avrà un grafo se conosco solo il numero n di nodi e l di lati senza conoscere la connessione dei lati.

Facciamo un esempio. In Fig. 3.9 abbiamo mostrato in (a) un grafo e in (b) tutti i possibili insiemi di taglio per esso, sei in totale (T1, T2, T3, T4, T5, T6).

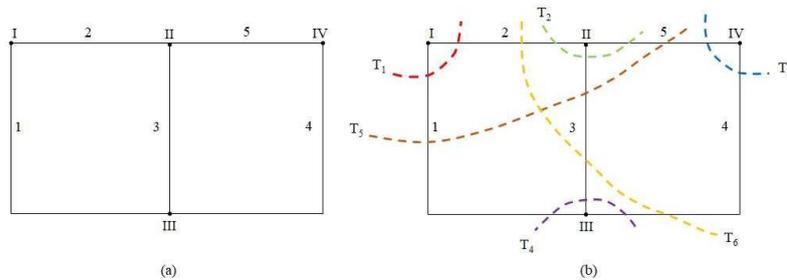


Fig. 3.9 – (a): un grafo con $n=4$ e $l=5$; (b): tutti (6) gli insiemi di taglio possibili del grafo di (a).

Quindi non sappiamo a priori quanti insiemi di taglio ci sono in un circuito. Tuttavia è possibile usare un criterio per individuare, in ogni circuito, un insieme “speciale” di insiemi di taglio che ha una numerosità pari $n-1$. Questo insieme si individua utilizzando ancora l’albero e il co-albero. Si procede in questo modo:

- Si sceglie un albero a piacere
- Poi con ogni lato dell’albero scelto e con alcuni lati di co-albero è possibile effettuare un “taglio” (in accordo con la definizione fornita) ottenendo un insieme di taglio.

Questo insieme di taglio così ottenuto, si chiama **insieme di taglio fondamentale**. E quanti insiemi di taglio fondamentali otteniamo con questa procedura? Poiché $n-1$ sono i lati dell’albero, scelto uno dei possibili alberi del grafo, individueremo $n-1$ insiemi di taglio fondamentali. Ad esempio, nel caso del grafo di Fig. 3.9a, con questa procedura, otterremo tre insiemi di taglio fondamentali.

Quali saranno questi insiemi di taglio? Dipende da quale albero scelgo ovviamente. Sottolineiamo che alberi diversi possono dare luogo allo stesso set di insiemi di taglio, come vedremo nel prossimo esempio.

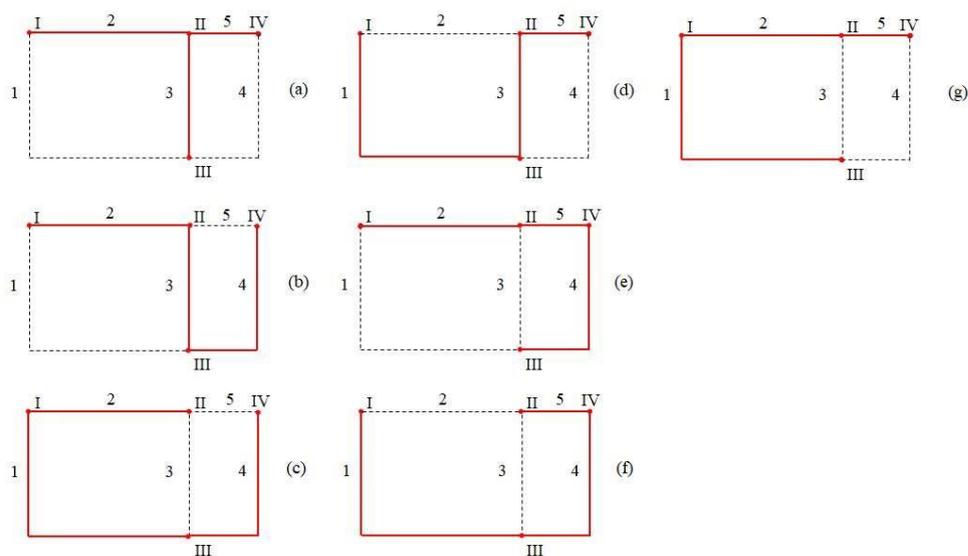


Fig. 3.10 – Alberi possibili per il grafo di Fig. 3.9a.

Nella Fig. 3.10, relativa al grafo di Fig. 3.9a, abbiamo 7 possibili alberi. Analogamente a quanto fatto per le maglie fondamentali, in questo caso, si può notare che nell'esempio esaminato vi sono sette diversi possibili insiemi di taglio fondamentali: $\{T1, T3, T4\}$; $\{T1, T3, T5\}$; $\{T2, T3, T5\}$; $\{T1, T3, T6\}$; $\{T1, T4, T5\}$; $\{T1, T2, T6\}$ (vedi Fig. 3.11); $\{T3, T4, T6\}$ (per gli insiemi di taglio indicati si veda la Fig. 3.9b).

Nell'esempio appena considerato possiamo affermare che il grafo di Fig. 3.9a, ha sette possibili insiemi di taglio fondamentali (poiché sette sono i possibili alberi per il grafo di Fig. 3.9a) la cui numerosità è 3 ($n-1 = 4-1$). Per esercizio si verifichi che gli insiemi indicati sono ricavabili dagli alberi di Fig. 3.10.

Nella Fig. 3.11 abbiamo rappresentato uno dei possibili di insiemi di taglio fondamentali.

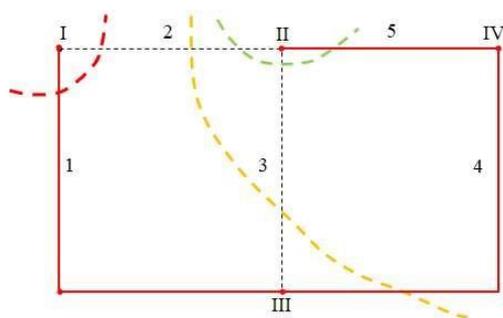


Fig. 3.11 – Una delle possibili terne di insiemi di taglio fondamentali per il grafo di Fig. 3.9a.

Si osservi che anche per gli insiemi di taglio possiamo stabilire un verso di attraversamento. Questo, come vedremo nell'esempio di Fig. 3.15, ci servirà a scrivere la prima Legge di Kirchhoff.

In conclusione:

- Sia la maglia che l'insieme di taglio sono degli insiemi di lati.
- Dato un grafo con n nodi e l lati non si può conoscere a priori il numero di maglie e di insiemi di taglio possibili.
- Viceversa, è possibile conoscere il numero di maglie fondamentali che è pari a $l - (n - 1)$ e il numero di insiemi di taglio fondamentali, pari a $n - 1$, associati ad un dato albero.
- Usando un albero e il relativo co-albero del grafo possiamo individuare un insieme di maglie fondamentali e un insieme di insiemi di taglio.

2.6 Il teorema fondamentale dei grafi*³

Enunciamo tale teorema che ci serve a rassicurarci su quanto detto nei precedenti due paragrafi.

Consideriamo un grafo connesso G di un circuito con n nodi e l lati, ed un suo qualsiasi albero A .

- Esiste un unico cammino lungo l'albero A tra qualsiasi coppia di nodi.
- I lati dell'albero sono $n - 1$ e quelli del co-albero $l - (n - 1)$.
- Ogni lato di co-albero, congiuntamente con l'unico cammino che sull'albero chiude la maglia corrispondente, definisce una **maglia fondamentale**.
- Ogni lato dell'albero, assieme ad alcuni lati del co-albero, definisce un unico insieme di taglio associato ad esso detto **insieme di taglio fondamentale**.

³ De Magistris, M., & Miano, G. (2016). *Circuiti* (p. 107). Springer, Milano.

3 Le leggi di Kirchhoff

Come anticipato nel § 1, cercare la soluzione di un circuito, e quindi conoscere il funzionamento del circuito, vuol dire determinare il valore delle tensioni e delle correnti di ogni lato. Ricordiamo che la prima cosa da fare è assegnare dei versi alle correnti e alle tensioni. Tali versi sono fissati ad arbitrio. Ogni incognita è indicata con il pedice relativo al lato, come rappresentato in Fig. 3.12.

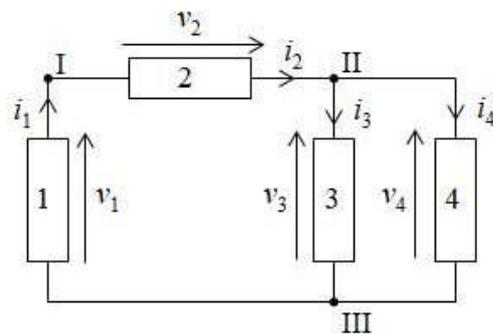


Fig. 3.12 – Versi di riferimento (arbitrari) per correnti e tensioni.

Il modo in cui sono connessi i bipoli tra loro condiziona il funzionamento del circuito. Abbiamo detto, infatti, che il valore delle grandezze in ciascun bipolo dipende da come tale bipolo è collegato al resto del circuito, oltre che dalla propria natura e da quella degli altri.

Il modello matematico che descrive il circuito sarà costituito da un sistema di equazioni. Per quanto detto, una parte di queste equazioni deriva da leggi legate alla connessione dei bipoli, ossia alle sole proprietà topologiche del circuito. Tali leggi si chiamano **Leggi di Kirchhoff**. Queste leggi sono due:

La I Legge di Kirchhoff, o legge alle correnti, o anche legge ai nodi (LKC)

La II Legge di Kirchhoff, o la legge alle tensioni, o anche legge alle maglie (LKT)

Tali leggi fondamentali della teoria dei circuiti derivano da due condizioni fisiche che è necessario verificare, viste già nel § 1 della Lezione 1, per poter modellare un sistema elettromagnetico con un bipolo:

- il fatto che la corrente entrante in un terminale sia uguale alla corrente uscente dell'altro terminale, diciamola i .⁴
- il fatto che possiamo definire un'unica tensione v tra i due morsetti del bipolo.⁵

3.1 La I Legge di Kirchhoff

L'enunciato della I legge di Kirchhoff (LKC):

La somma algebrica delle correnti entranti in (o uscenti da) ogni nodo è nulla in ogni istante.

La somma è una “somma algebrica” perché avendo scelto un verso “entrante” o “uscente” per il nodo si dovranno prendere con un certo segno tutte le correnti concordi con il verso scelto e con il segno contrario quelle non concordi. Non importa che segno si sceglie per le grandezze concordi con il verso scelto, in quanto la somma di tutti i termini dovrà essere nulla. Per convenzione possiamo, ad esempio, scegliere il segno positivo per le correnti entranti nel nodo e negativo per quelle uscenti.

Avendo introdotto gli insiemi di taglio (vedi § 2.5), possiamo enunciare la Legge di Kirchhoff alle correnti utilizzando appunto gli insiemi di taglio:

La somma algebrica delle correnti che attraversano un insieme di taglio del circuito è nulla in ogni istante.

Anche in questo caso la somma è una “somma algebrica” perché avendo scelto un verso “di attraversamento” del taglio si dovranno prendere con un certo segno tutte le correnti concordi con il verso scelto e con il segno contrario quelle non concordi.

Per convincerci facilmente della LKC usata come base della teoria dei circuiti basta considerare un generico nodo di un sistema reale come quello rappresentato in Fig. 3.13: consideriamo una superficie chiusa \square che contiene il nodo e applichiamo la legge di

⁴ All'interno del sistema non devono esserci sorgenti di cariche o accumulazione di cariche e quindi non ci deve essere variazione di carica al suo interno. Nell'ipotesi quasi-stazionaria possiamo dire che, anche se questa variazione esiste, essa non deve essere confrontabile con i valori della corrente. Per la legge di conservazione della carica, dunque, se questa variazione è trascurabile le due correnti sono uguali.

⁵ Questo è verificato se all'esterno del componente il campo elettrico è irrotazionale o almeno se la variazione del flusso di campo magnetico è trascurabile rispetto ai valori della tensione (ipotesi di quasi-stazionarietà)

conservazione della carica al volume contenuto nella superficie Σ . Poiché in questo spazio non vi è accumulo o generazione di cariche, per ipotesi, possiamo scrivere facilmente che:

$$i_1 = i_2 + i_3 + i_4 \quad \square \quad i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0 \quad (3.1)$$

che è la LKC al nodo del circuito che modella il sistema di Fig. 3.13.

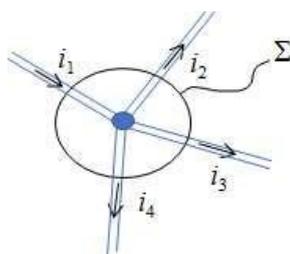


Fig. 3.13 – Un esempio di nodo con le relative correnti.

Analogamente possiamo immaginare di procedere per convincerci dell'enunciato della LKC con gli insiemi di taglio.

Facciamo ora due esempi considerando il circuito di Fig. 3.14 e Fig. 3.15.

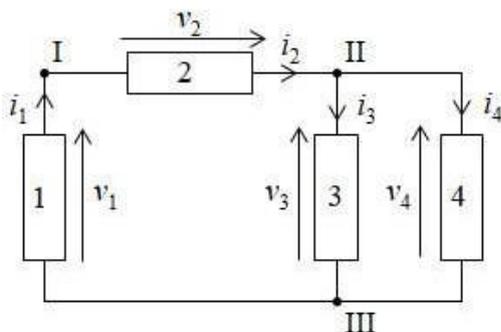


Fig. 3.14 – Esempio di circuito con tre nodi e 3 insiemi di taglio.

Scriviamo la LKC ai nodi I, II e III della Fig. 3.14:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_1 - i_3 - i_4 = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} i_2 + i_3 + i_4 = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} i_1 - i_3 - i_4 = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

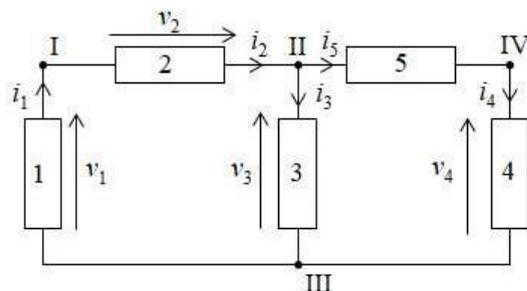


Fig. 3.15 – Esempio di circuito con 4 nodi e 6 insiemi di taglio.

Ora, sempre per il circuito di Fig. 3.15, e ricordando che gli insiemi di taglio sono quelli di Fig. 3.9b, scriviamo la LKC con i sei insiemi di taglio di Fig. 3.9b:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_1 - i_3 - i_4 = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} i_2 + i_3 + i_4 = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} i_1 + i_3 + i_4 = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} i_1 - i_3 - i_4 = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} i_2 - i_3 - i_4 = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Per scrivere le equazioni (3.3) abbiamo dovuto dare un verso di attraversamento degli insiemi di taglio. Verificare quale verso è stato scelto!

3.2 La II Legge di Kirchhoff

L'enunciato della II legge di Kirchhoff (LKT):

La somma algebrica delle tensioni dei lati che costituiscono una maglia è nulla in ogni istante avendo scelto arbitrariamente un verso di percorrenza della maglia, orario o antiorario.

La somma è una “somma algebrica” perché avendo scelto un verso “orario” o “antiorario” per la maglia, si dovranno prendere con un certo segno tutte le tensioni concordi con il verso scelto e con il segno contrario quelle non concordi. Ovviamente, non importa che segno si sceglie per le grandezze concordi con il verso scelto, in quanto la somma di tutti i termini dovrà essere nulla. Per convenzione possiamo scegliere il segno positivo per le tensioni concordi con il verso di percorrenza della maglia e negativo per le altre.

Vediamo ora un esempio di applicazione della II legge di Kirchhoff. Consideriamo le tre maglie possibili del circuito di Fig. 3.14, come indicato in Fig. 3.16: la prima maglia m_1 è quella indicata in rosso, la seconda m_2 è indicata in verde mentre la terza m_3 è quella indicata in blu.

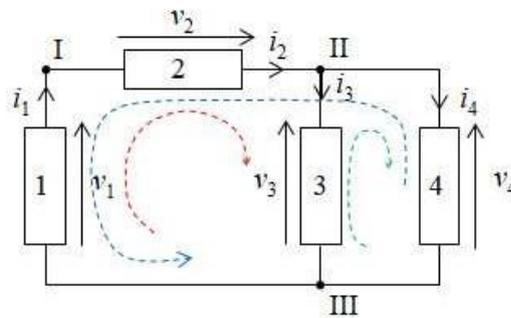


Fig. 3.16 – Maglie nel circuito di Fig. 3.14.

Per tali maglie possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \square v_1 + v_2 \square v_3 &= 0 \\ \square v_3 \square v_4 &= 0 \\ \square \square v_1 \square v_2 + v_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Che sono le equazioni della II Legge di Kirchhoff.

Ma cosa ci assicura che la LKT sia soddisfatta per ogni maglia del circuito?

Per rispondere a questa domanda ricordiamoci del fatto che per utilizzare un modello circuitale abbiamo verificato l'ipotesi di campo elettrico irrotazionale ed è quindi possibile introdurre una tensione pari alla differenza di potenziale tra i morsetti del bipolo (vedi la 1.1 della Lezione 1). Sfruttando quanto detto, proviamo a dimostrare che le equazioni (3.4) sono sempre vere. Allo scopo introduciamo la funzione potenziale

elettrico definita ai nodi I, II e III nel circuito di Fig.7, diciamole: v_I , v_{II} ed v_{III} . Essendo il circuito costituito da bipoli è possibile definire per essi una tensione pari ad una differenza di potenziale come nel seguito:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_I - v_{II} \\ v_2 &= v_{II} - v_I \\ v_3 &= v_{II} - v_{III} \\ v_4 &= v_I - v_{III} \end{aligned} \quad (3.5)$$

In questo modo la (3.4) è banalmente verificata, infatti:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= 0 = (v_I - v_{II}) + (v_{II} - v_I) + (v_{II} - v_{III}) \\ v_3 + v_4 &= 0 = (v_{II} - v_{III}) + (v_I - v_{III}) \\ v_1 + v_2 + v_4 &= 0 = (v_I - v_{II}) + (v_{II} - v_I) + (v_I - v_{III}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pertanto, la veridicità della II Legge di Kirchhoff scaturisce direttamente dalla condizione 2 (vedi § 1 della lezione 1) per l'utilizzo del modello circuitale.

Prima di chiudere si osservi che le equazioni che scriviamo con la I e la II Legge, sono equazioni di tipo algebrico.

3.3 Il sistema di interconnessione

Con la LKC e la LKT possiamo trovare rispettivamente n equazioni e m equazioni. Dove n indica il numero dei nodi del circuito e m il numero delle maglie.

Considerando, poi, le relazioni caratteristiche dei bipoli presenti nel circuito, possiamo scrivere altre l equazioni, una per ogni lato o bipolo del circuito.

Ma di quante equazioni deve essere composto il sistema che governa il funzionamento di un circuito al fine di ammettere una soluzione unica per le incognite correnti e tensioni?

Se l è il numero dei lati, ci sono $2l$ incognite nel circuito, ossia tutte le tensioni e tutte le correnti del circuito di l lati. Quindi per trovare un'unica soluzione del problema è necessario disporre di $2l$ equazioni linearmente indipendenti.

Ricordiamo che il modello matematico che descrive il funzionamento di un circuito dipende dalle Leggi di Kirchhoff e dalla natura dei bipoli presenti nel circuito attraverso le relative relazioni caratteristiche. Come già anticipato, tali relazioni caratteristiche saranno l , perché l sono i bipoli presenti nel circuito. Queste l equazioni sono linearmente indipendenti poiché ognuna descrive la natura del bipolo a cui si riferisce senza essere condizionata dagli altri bipoli. Se attraverso le relazioni caratteristiche ricaviamo l equazioni linearmente indipendenti, dobbiamo verificare che con le Leggi di Kirchhoff ne ricaviamo altre l linearmente indipendenti. Viceversa, il modello considerato non risulterebbe efficace. Infatti, se le leggi di Kirchhoff permettessero di ricavare meno di l equazioni linearmente indipendenti (sistema sotto-determinato), si otterrebbero infinite soluzioni; se invece se ne ricavassero più di l (sistema sovradeterminato), non si otterrebbe alcuna soluzione.

I nodi sono n . Quindi, con la prima legge, si scrivono n equazioni.

Diciamo m il numero delle maglie che possiamo individuare nel circuito. Con la seconda legge si scrivono m equazioni.

Dovrebbe risultare che $n + m = l$. Ma ciò non è vero perché si può dimostrare che risulta $n + m > l$. Abbiamo più equazioni di quante ce ne occorrono! Come possiamo fare? Domandiamoci se tutte queste equazioni sono linearmente indipendenti. In altre parole, è possibile che con le LKC e LKT scriviamo più equazioni del necessario e che talune equazioni si possono ricavare dalle altre?

In realtà è così:

con la LKC scriviamo $n-1$ equazioni linearmente indipendenti e con la LKT $l-(n-1)$ equazioni linearmente indipendenti.

Questo insieme di equazioni linearmente indipendenti si chiama **Sistema di Interconnessione**.

Vediamo perché questo sistema consiste di l equazioni.

3.3.1 Dimostrazione che le LKC forniscono $n-1$ equazioni linearmente indipendenti*

Facciamo vedere innanzitutto che le n equazioni ai nodi di un circuito sono linearmente dipendenti. Scriviamo tutte le n equazioni ai nodi e sommiamole membro a membro e verifichiamo che si ottiene una identità $0=0$.

Ad esempio, per le (3.2) otteniamo:

$$(i_1 - i_2) + (i_2 - i_3 - i_4) + (-i_1 + i_3 + i_4) = 0 \quad (3.7)$$

Come si può osservare, ogni corrente compare in due equazioni delle n scritte con la LKC con segno opposto perché in un nodo, relativo ad una equazione, entra e in un altro, relativo ad un'altra equazione, esce. In altre parole, considerato il lato i -simo che termina con i due nodi I e III, si ha che la corrente i_i entra nel nodo I ed esce dal nodo III (Fig. 3.14).

Il fatto che la somma delle n equazioni mi dia una identità dimostra che ogni equazione delle n è linearmente dipendente dalle altre e che quindi è possibile eliminarne almeno una, scelta a caso.

Ci chiediamo: ma quante delle $n-1$ rimaste sono linearmente indipendenti?

Per rispondere a questa domanda ricorriamo alla nozione di albero e co-albero introdotto nel § 2.3. Se scegliamo un albero (ad esempio uno di quelli della Fig. 3.5), possiamo scrivere la LKC per ogni nodo dell'albero partendo da uno dei due che terminano il percorso ed escludendo l'ultimo nodo del percorso. L'ultimo nodo lo escludiamo perché abbiamo detto che una equazione è da escludere. Scriveremo $n-1$ equazioni poiché, escludendo l'ultimo, i nodi dell'albero del percorso da fare sui suoi lati sono $n-1$. Una volta scritte le equazioni, abbiamo bisogno di fare degli aggiustamenti:

dalla equazione al secondo nodo fino a quella del $(n-1)$ -simo nodo, sostituiamo una delle due correnti di albero che ivi vi compaiono, con le correnti di co-albero presenti nella equazione del nodo precedente. Così operando, osserviamo che ogni corrente di lato di albero compare in esclusiva in una delle equazioni. Pertanto, il sistema di equazioni scritte avrà la caratteristica di avere ogni equazione con una delle incognite in esclusiva

(le correnti di albero) e quindi tutte le $n-1$ equazioni sono linearmente indipendenti e necessarie al sistema di equazioni circuitali.

Facciamo un esempio:

Consideriamo il circuito di Fig. 3.12 e l'albero e co-albero della Fig. 3.5(a). Escludiamo il nodo III. Al nodo I abbiamo una sola corrente di lato appartenente all'albero: i_2 che sarà funzione delle correnti di co-albero: i_1 . Nell'esempio considerato, dunque, avremo:

$$i_2(\text{albero}) - i_1(\text{co-albero}) = 0 \quad (3.8)$$

Consideriamo ora il nodo II dello stesso circuito:

$$i_2(\text{albero}) - i_3(\text{albero}) - i_4(\text{co-albero}) = 0 \quad (3.9)$$

In questa seconda equazione compaiono due correnti d'albero: i_2 e i_3 , ed una corrente di co-albero: i_4 . Ma i_2 si può esprimere in funzione di correnti del co-albero grazie all'equazione (3.8). La corrente d'albero i_3 può essere dunque scritta in funzione di tutte correnti di co-albero:

$$i_3(\text{albero}) = i_2(\text{albero}) - i_4(\text{co-albero}) = i_1(\text{co-albero}) - i_4(\text{co-albero}) \quad (3.10)$$

Così facendo, anche in questa seconda equazione compare una sola corrente d'albero. Questo vale per ognuno dei $n-1$ nodi dell'albero (avendo escluso l' n -simo). Concludiamo che le prime $n-1$ equazioni ai nodi che incontriamo percorrendo l'albero sono linearmente indipendenti perché ognuna di esse ha un'incognita in esclusiva (una corrente d'albero). Abbiamo detto che l' n -sima equazione è linearmente dipendente in quanto può essere ottenuta come combinazione lineare delle prime $n-1$. Sia chiaro che possiamo escludere dall'insieme delle n equazioni possibili una a caso.

Abbiamo così dimostrato che con la LKC è possibile scrivere $n-1$ equazioni linearmente indipendenti.

Prima di concludere, sottolineiamo che con gli insiemi di taglio avremmo potuto dimostrare l'assunto in maniera analoga.

3.3.2 Dimostrazione che le LKT forniscono $l(n-1)$ equazioni linearmente indipendenti*

Vediamo in questo paragrafo come riuscire a scrivere un insieme di $l(n-1)$ equazioni linearmente indipendenti con la II Legge di Kirchhoff.

Utilizziamo ancora l'albero e il co-albero e, di conseguenza, un insieme di maglie fondamentali. Ricordiamo che (vedi § 2.4) tale insieme è composto da $l(n-1)$ maglie e che in questo insieme le maglie hanno ognuna un lato di co-albero in esclusiva.

Per la scrittura delle equazioni, si procede come segue: si sceglie un albero e quindi un insieme di maglie fondamentali. Si scrive la LKT per tali maglie.

In questo modo scriviamo tutte equazioni aventi ognuna una tensione di un lato di co-albero in esclusiva. Quindi, queste $l(n-1)$ equazioni sono tutte linearmente indipendenti.

Poiché, in relazione ad un albero scelto tra i possibili, ogni maglia non fondamentale si può ottenere come unione di almeno due maglie fondamentali, ogni equazione relativa a maglie non fondamentali si ottiene come combinazione lineare di equazioni relative a maglie fondamentali. Questo equivale alla dipendenza lineare delle equazioni relative a maglie non fondamentali.

Facciamo un esempio:

Consideriamo il circuito di Fig. 3.12 e l'insieme di maglie fondamentali della Fig. 3.8(a). Le due maglie della figura sono la m_1 e m_2 della Fig. 3.6(b). Quindi risulta:

$$\text{per } m_1: v_1 + v_2 - v_3 = 0 \tag{3.11}$$

$$\text{per } m_2: -v_3 + v_4 = 0$$

Le (3.11) sono le equazioni della LKT per il circuito di Fig. 3.12. Facciamo vedere che l'equazione alla maglia m_3 della Fig. 3.6(b) si ricava dalle (3.11). La maglia $m_3 = m_2 - m_1$. Notiamo infatti che m_3 ed m_2 hanno stesso verso antiorario. Quindi dobbiamo sottrarre alla seconda equazione delle (3.11), la prima. Otteniamo:

$$\text{per } m_3: v_3 + v_4 - v_1 - v_2 + v_3 = -v_1 - v_2 + v_4 = 0 \quad (3.12)$$

Che è l'equazione LKT alla maglia m_3 !

In conclusione, il sistema d'interconnessione del circuito di Fig. 3.12 risulta composto dalle l equazioni ($n-1=2$ LKC e $l-(n-1)=2$ LKT):

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 &= 0 \\ i_2 - i_3 + i_4 &= 0 \\ v_1 + v_2 - v_3 &= 0 \\ v_3 - v_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4 Le leggi di Kirchhoff in forma matriciale

Per agevolezza computazionale risulta molto conveniente scrivere il sistema d'interconnessione in forma matriciale.

Consideriamo un circuito con n nodi ed l lati e scegliamo i versi delle correnti e delle tensioni in maniera arbitraria su ogni bipolo.

Introduciamo alcune matrici comode per ottenere la forma matriciale del sistema d'interconnessione.

3.4.1 La matrice d'incidenza e la I legge di Kirchhoff

La **Matrice d'Incidenza** \mathbf{A} è una matrice $n \times l$ che otteniamo utilizzando la relazione d'incidenza dei lati sui nodi del circuito e che serve a rappresentare in forma matriciale le n equazioni ai nodi della I Legge di Kirchhoff.

È una matrice avente per colonne un indice corrispondente agli l lati del circuito e per righe un indice corrispondente agli n nodi. Ogni elemento della matrice, a_{ij} , esprime la relazione d'incidenza del lato j sul nodo i . Quindi, scriviamo il valore gli elementi della matrice secondo questo criterio:

$a_{ij} = 0 \rightarrow$ se il lato che corrisponde all'indice di colonna j non incide nel nodo dell'indice di riga i .

$a_{ij} = 1 \rightarrow$ se il lato che corrisponde all'indice di colonna j incide nel nodo dell'indice di riga i e se la corrente del lato j entra nel nodo i .

$a_{ij} = -1 \rightarrow$ se il lato che corrisponde all'indice di colonna j incide nel nodo dell'indice di riga i e se la corrente del lato j esce dal nodo i .

La matrice \mathbf{A} è una matrice $n \times l$.

Facciamo un esempio. Consideriamo il circuito di Fig. 3.17. Scriviamo la matrice d'incidenza considerando un nodo alla volta e verificando quali lati incidono e se per quei lati la corrente relativa entra nel nodo o esce.

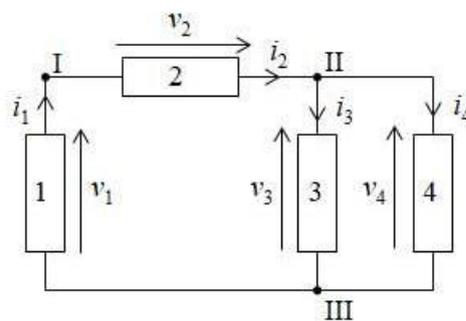


Fig. 3.17 – Esempio di circuito.

La matrice d'incidenza in questo caso risulta essere:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Una volta che abbiamo individuato la matrice \mathbf{A} , come nella (3.14), possiamo scrivere la seguente equazione vettoriale:

$$\mathbf{A} \mathbf{i}(t) = 0 \quad (3.15)$$

dove \square rappresenta il prodotto riga per colonna tra la matrice \mathbf{A} ed il vettore colonna \mathbf{i} delle intensità di corrente del circuito definito come $\mathbf{i} = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}^T$, di dimensione l . Si

osservi che il vettore \mathbf{i} delle correnti deve essere ordinato con l'indice in accordo con quello dei lati corrispondenti alle colonne della matrice \mathbf{A} .

La (3.15) rappresenta un sistema di n equazioni linearmente dipendenti, come già visto in precedenza. Dal punto di vista matriciale, inoltre, si può osservare come ognuna delle tre righe della matrice \mathbf{A} possa essere ottenuta come combinazione lineare delle altre due⁶. Ricordiamoci che con la LKC riusciamo a scrivere $n-1$ equazioni linearmente indipendenti e questo corrisponde ad eliminare dalle (3.15) una delle tre equazioni a piacere. In questo modo si ottiene la **matrice di incidenza ridotta** \mathbf{A}_r di dimensioni $(n-1) \times l$. Nell'esempio del circuito della Fig. 3.17, escludendo dalla (3.14) ARBITRARIAMENTE la terza riga, otteniamo:

$$\mathbf{A}_r = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

Come la (3.16), potevamo ottenere altre due “versioni” della \mathbf{A}_r eliminando arbitrariamente la prima o la seconda riga della \mathbf{A} .

Con la matrice \mathbf{A}_r possiamo scrivere il sistema di equazioni (LKC) linearmente indipendenti:

$$\mathbf{A}_r \mathbf{i}(t) = 0 \quad (3.17)$$

Dove ancora $\mathbf{i} = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}^T$. Il sistema (3.17) è un sistema di $n-1$ equazioni linearmente indipendenti e la matrice \mathbf{A}_r è a rango massimo⁷.

Sempre per l'esempio di Fig. 3.17, dalla (3.16), abbiamo:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 - i_4 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

⁶ Per definizione, le righe di una matrice sono linearmente dipendenti se ALMENO una riga della matrice può essere ottenuta come combinazione lineare delle altre.

⁷ Ricordiamo che il rango di una matrice corrisponda al massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti. Nel nostro caso, la matrice avrà rango massimo o pieno $(n-1) = 2$ essendo le sue due righe linearmente indipendenti.

che sono le prime due equazioni del sistema (3.2)!

3.4.2 La matrice di un insieme di maglie fondamentali e la II legge di Kirchhoff

Occupiamoci ora di individuare una forma matriciale per le equazioni da scrivere con la II legge di Kirchhoff.

Abbiamo visto nel § 3.3.2, che scriviamo $l \times (n-1)$ equazioni linearmente indipendenti che corrispondono ad un sistema di maglie fondamentali.

La **matrice di un insieme di maglie fondamentali** \mathbf{B}_f è una matrice $l \times (n-1)$ che otteniamo utilizzando uno degli insiemi di maglie fondamentali e che serve a rappresentare in forma matriciale le $l \times (n-1)$ equazioni alle maglie della II Legge di Kirchhoff.

È una matrice avente per colonne un indice corrispondente agli l lati del circuito e per righe un indice corrispondente alle maglie dell'insieme fondamentale scelto. Il generico elemento della matrice, b_{ij} , sarà:

$b_{ij} = 0 \rightarrow$ se il lato j non compare nella maglia fondamentale i -sima.

$b_{ij} = 1 \rightarrow$ se il lato j compare nella maglia fondamentale i -sima e se la tensione del lato j ha verso concorde con quello della maglia fondamentale i -sima.

$b_{ij} = -1 \rightarrow$ se il lato j compare nella maglia fondamentale i -sima e se la tensione del lato j ha verso discorde con quello della maglia fondamentale i -sima.

La matrice \mathbf{B}_f è una matrice $l \times (n-1)$.

Facciamo un esempio utilizzando sempre il circuito di Fig. 3.17. Prima di scrivere la matrice è necessario scegliere un insieme di maglie fondamentali, come ad esempio quello di Fig. 3.18. Per questa scelta, si ha:

$$\mathbf{B}_f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

dove la prima riga è relativa alla maglia m1 e la seconda riga alla maglia m2. La matrice \mathbf{B}_f ha dimensioni $l \times (n-1) \times l$.

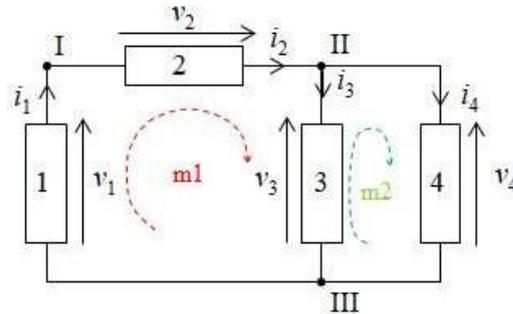


Fig. 3.18 – Insieme di maglie fondamentali per il circuito di Fig. 3.17.

Introdotta il vettore colonna $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}^T$ delle tensioni ordinate con l'indice secondo quello delle colonne della matrice \mathbf{B}_f , possiamo scrivere la LKT per il circuito di Fig. 3.17 in forma matriciale:

$$\mathbf{B}_f \mathbf{v}(t) = 0 \quad (3.20)$$

che, utilizzando la (3.19) diventa:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 - v_3 &= 0 \\ v_3 - v_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

che sono le ultime due equazioni del sistema (3.13)!

3.4.3 Il sistema d'interconnessione in forma matriciale

In questo paragrafo daremo una formulazione matriciale al Sistema di Interconnessione introdotto nel § 3.3.

Abbiamo due modi di formulare il Sistema d'interconnessione in forma matriciale:

1. Utilizzando unicamente la matrice d'incidenza ridotta \mathbf{A}_r .

2. Utilizzando la matrice d'incidenza ridotta \mathbf{A}_r e la matrice di maglia fondamentale \mathbf{B}_f .

Vediamo il modo 1.

Dobbiamo riuscire ad utilizzare la sola matrice di incidenza ridotta \mathbf{A}_r per scrivere sia le LKC che le LKT. A tale scopo, introduciamo i potenziali elettrici ai nodi ed esprimiamo le tensioni del circuito come differenza di potenziali di nodo.

Facciamo un esempio: consideriamo il circuito di Fig. 3.17 in cui, però, ricorriamo alla stessa convenzione del generatore su tutti i bipoli. Consideriamo, quindi, la Fig. 3.19.

Per il circuito di Fig. 3.19 possiamo scrivere la LKT avendo scelto come maglie fondamentali ancora le maglie m1 e m2 della Fig. 3.6(b):

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_3 + v_4 = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Possiamo poi scrivere le tensioni in funzione dei potenziali di nodo che soddisfano automaticamente le (3.22):

$$\begin{cases} v_1 = \varphi_I - \varphi_{II} \\ v_2 = \varphi_{II} - \varphi_{III} \\ v_3 = \varphi_{III} - \varphi_{II} \\ v_4 = \varphi_{III} - \varphi_{II} \end{cases} \quad (3.23)$$

Ora, ricordiamo che le equazioni della II legge di Kirchhoff sono automaticamente soddisfatte se esprimiamo le tensioni in termini di potenziali di nodo (vedi § 3.2). Quindi, scrivere le (3.23) o le (3.22) è la stessa cosa. In quanto, ripetiamo, le (2.23) fanno verificare automaticamente le (3.22). Allora possiamo considerare le (3.23) al posto delle (3.22).

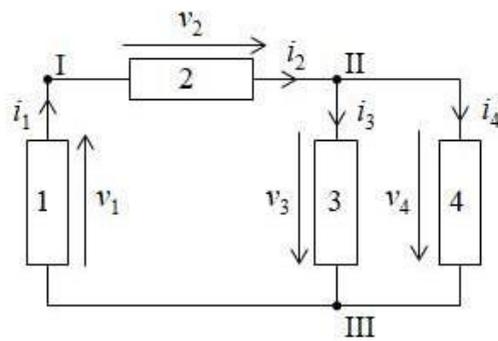


Fig. 3.19 – Esempio di circuito con stessa convenzione su tutti i bipoli.⁸

Questo è vero in generale: possiamo considerare al posto della $l-(n-1)$ equazioni alle maglie indipendenti della II legge di Kirchhoff, il vettore delle tensioni in funzione dei potenziali di nodo. Ricordiamoci che il nostro scopo qui è trovare la forma matriciale della II legge di Kirchhoff avvalendoci della sola \mathbf{A}_r . Per fare ciò, ci conviene fissare al valore zero⁹ il potenziale del nodo scartato quando abbiamo scritto la LKC con la matrice \mathbf{A}_r .

Nel nostro esempio, abbiamo scartato il nodo III per scrivere la \mathbf{A}_r (3.16) e quindi dobbiamo porre:

$$\varphi_{III} = 0 \quad (3.24)$$

e riscrivere le (3.23) come segue:

$$\begin{aligned} \varphi v_1 &= \varphi_I \\ \varphi v_2 &= \varphi_{II} + \varphi_I \\ \varphi v_3 &= \varphi_{II} \\ \varphi v_4 &= \varphi_{II} \end{aligned} \quad (3.25)$$

⁸ Osserviamo che, a differenza della Fig.3.17, in questo caso abbiamo fatto la stessa convenzione su tutti i bipoli.

⁹ Possiamo porre a zero in maniera arbitraria il valore di uno dei nodi poiché il potenziale scalare che si introduce nel modello matematico che descrive il sistema fisico reale assume il potenziale elettrostatico definito a meno di una costante arbitraria. Pertanto, nel nostro modello circuitale, il valore di tutti i potenziali di nodo è definito a meno di una costante arbitraria di riferimento che per comodità assumiamo pari a zero.

Le (3.25) scritte in forma matriciale diventano:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \square 1 & 1 \\ 0 & \square 1 \\ 0 & \square 1 \end{array} \mathbb{V}(t) \quad (3.26)$$

dove $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}^T$, $\mathbb{V} = \{V_1, V_2\}^T$.

Osserviamo che la matrice utilizzata nelle (3.26) è la matrice \mathbf{A}_r che troviamo nella (3.16), valida anche per il circuito di Fig. 3.19 in quanto non abbiamo modificato il verso delle correnti del circuito di Fig. 3.17. Basta verificarlo guardando il circuito di Fig. 3.19. A partire da questo esempio possiamo generalizzare quanto trovato: ordinando i potenziali di nodo in ordine crescente di nodo, ponendo $V_n=0$ e facendo sempre la stessa convenzione del generatore su tutti i bipoli, si ha che:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}_r^T \mathbb{V}(t) \quad (3.27)$$

dove $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T$, $\mathbb{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1})^T$ e \mathbf{A}_r^T è la matrice trasposta di \mathbf{A}_r . Il sistema

(3.27) è un sistema di l equazioni.

Allora il Sistema di Equazioni di Interconnessione diventa:

$$\begin{array}{c} \square \mathbf{A}_r \mathbb{I}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \square \end{array} = \mathbf{A}_r^T \mathbb{V}(t) \quad (3.28)$$

Osserviamo che il sistema (3.28) è un sistema di $l + (n-1)$ equazioni. Considerando che il sistema di interconnessione dovrebbe avere l equazioni, ci siamo complicati la vita avendo ottenuto un sistema con un numero maggiore di equazioni. In realtà è giusto che sia così perché le incognite con questo metodo sono aumentate a $l + (n-1)$ in quanto abbiamo introdotto anche le incognite potenziali ai nodi che sono $(n-1)$. Quindi ci siamo complicati la vita ma in maniera corretta!

Osserviamo che se avessimo fatto la convenzione dell'utilizzatore su tutti i bipoli invece di quella del generatore avremmo ottenuto il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_r \mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{A}_r^T \mathbf{v}(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

Provate a verificarlo!

Vediamo il modo 2.

In questo caso le cose sono più semplici. Basta mettere insieme le (3.17) e (3.20) otteniamo:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_r \mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_f \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.30)$$

Il sistema (3.30) è un sistema di l equazioni in l incognite.

4 Il sistema di equazioni circuitali

Ora vogliamo occuparci di mettere insieme le relazioni caratteristiche con il sistema d'interconnessione per formare il modello circuitale completo che chiamiamo *sistema di equazioni circuitali*.

Consideriamo il generico circuito di Fig. 3.20, in cui abbiamo evidenziato i generatori ideali all'esterno di un box in cui abbiamo considerato solo elementi passivi.

Vogliamo studiare il comportamento di tale sistema per ogni istante t maggiore di un istante iniziale t_0 . Nel circuito di Fig. 3.20 supponiamo vi siano:

n_R = numero resistori

n_C = numero condensatori

n_L = numero induttori

n_e = numero generatori indipendenti di tensione

n_j = numero generatori indipendenti di corrente

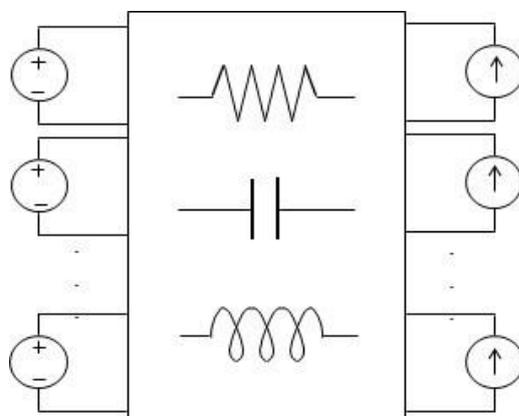


Fig. 3.20 □ Circuito dinamico lineare.

È chiaro che:

$$n_R + n_C + n_L + n_e + n_j = l \quad (3.31)$$

dove l è il numero di lati complessivo del circuito.

Escludiamo uno dei nodi. Scriviamo la LKC ad $n-1$ nodi e la LKT a $l-(n-1)$ maglie fondamentali. A queste equazioni vanno aggiunte le equazioni caratteristiche:

$$\sum_k f_k v_k(t), i_k(t), \frac{dv_i(t)}{dt}, \frac{di_j(t)}{dt} = 0 \quad (3.32)$$

con $k = 1, \dots, n_R$; $i = 1, \dots, n_C$; $j = 1, \dots, n_L$

E quindi, usando le (3.30) (3.30) e le (3.32) (3.32), otteniamo il seguente **sistema di equazioni circuitali**:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r \mathbf{i}(t) &= 0 && (n-1) \text{ equazioni} \\ \mathbf{B}_t \mathbf{v}(t) &= 0 && (l-(n-1)) \text{ equazioni} \\ \sum_k f_k v_k(t), i_k(t), \frac{dv_i(t)}{dt}, \frac{di_j(t)}{dt} &= 0 && l \text{ equazioni} \end{aligned} \quad (3.33)$$

con $t > t_0$.

Questo è un sistema di $2l$ equazioni algebrico-differenziale lineare in $2l$ incognite (le correnti e le tensioni di lato).

Le l relazioni caratteristiche dei bipoli presenti nel sistema (3.33) (3.33), le possiamo riscrivere in maniera più specifica tenendo conto dei possibili bipoli presenti nel circuito di Fig. 3.20:

$$\begin{aligned} v_k(t) &= R_k i_k(t) && k = 1, \dots, n_R \\ i_i(t) &= C_i \frac{dv_i(t)}{dt} && i = 1, \dots, n_C \\ v_j(t) &= L_j \frac{di_j(t)}{dt} && j = 1, \dots, n_L \\ v_n(t) &= e_n(t) && n = 1, \dots, n_e \\ i_m(t) &= j_m(t) && m = 1, \dots, n_j \end{aligned} \quad (3.34)$$

E quindi il sistema di equazioni circuitali generale sarà:

$$\begin{aligned}
 \square \mathbf{A}_r \mathbf{i}(t) &= 0 & n & \square 1 \text{ equazioni} \\
 \square \mathbf{B}_i \mathbf{v}(t) &= 0 & l & \square (n \square 1) \text{ equazioni} \\
 \square v_k(t) &= R_k i_k(t) & k & = 1, \dots, n_R \\
 \square i_i(t) &= C_i \frac{dv_i(t)}{dt} & i & = 1, \dots, n_C \\
 \square v_j(t) &= L_j \frac{di_j(t)}{dt} & j & = 1, \dots, n_L \\
 \square v_n(t) &= e_n(t) & n & = 1, \dots, n_e \\
 \square i_m(t) &= j_m(t) & m & = 1, \dots, n_j
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

con $t > t_0$.

Abbiamo ottenuto quello che cercavamo. Abbiamo il modello matematico del sistema.

Ora dobbiamo occuparci di trovare la soluzione! Lo faremo nelle prossime lezioni.

5 Il metodo dei potenziali di nodo

Esiste un modo per ridurre il numero delle incognite nel sistema di equazioni circuitali. Esso consiste nello scegliere, come incognite del problema, invece delle tensioni o delle correnti nei lati, i potenziali relativi ai nodi della rete che chiameremo **potenziali di nodo**. A tale scopo, possiamo porre ogni tensione di lato nella forma $\varphi_r - \varphi_s$, dove φ_r e φ_s sono, evidentemente, i potenziali dei nodi r ed s rispetto ad un riferimento che, come è noto, è arbitrario (vedi come esempio le (3.23) (3.23)). Se in particolare scegliamo come riferimento per i potenziali quello assunto da uno dei nodi, che per comodità poniamo a potenziale zero (vedi nota 4 a pagina 30), ci ritroveremo con $n - 1$ incognite φ_i , potenziali assunti dai restanti nodi della rete. Il nodo con potenziale nullo viene detto **nodo di riferimento o nodo a terra**¹⁰.

Il sistema di $n - 1$ equazioni nelle $n - 1$ incognite (i potenziali ai nodi) che ci occorre per risolvere il circuito, si può facilmente ottenere scrivendo le equazioni dettate dalla LKC ad $n - 1$ nodi esprimendo però, attraverso le relazioni caratteristiche, le correnti nei singoli lati mediante le differenze di potenziale $\varphi_i - \varphi_j$. Osserviamo che per le incognite φ_i non occorre scrivere le equazioni che esprimono la LKT; esse infatti, per definizione, le soddisfano, trattandosi, appunto, di potenziali.

L'automatica riduzione delle equazioni rende pertanto conveniente la scelta dei potenziali ai nodi come incognite. Naturalmente la conoscenza dei potenziali in ogni nodo equivale ad aver risolto il circuito. Infatti, la differenza dei due potenziali relativi ad un determinato lato fornisce la tensione sul lato, e da questa, mediante la caratteristica del lato (ossia del generico bipolo del circuito), si può risalire alla corrente che lo interessa.

Faremo un esempio nel § 5.3 della Lezione 4.

¹⁰ Questa terminologia ricorda il fatto che in un circuito, in generale, è conveniente collegare un punto dello stesso ad un corpo il cui potenziale sia eguale a quello dell'operatore e possa ritenersi stabile, e ciò sia per ragioni di sicurezza degli operatori, sia per evitare che gli effetti esterni al circuito stesso possano rendere fluttuanti, entro certi limiti, i potenziali dei nodi.

6 Il metodo delle correnti di maglia

Come abbiamo visto, la caratteristica che rende le incognite potenziali ai nodi così convenienti, sta nel fatto che tali incognite soddisfano automaticamente la LKT alle maglie; occorre quindi solo imporre che soddisfino la LKC. È possibile fare una scelta analoga per le correnti, quelle che chiameremo *correnti di maglia*.

Si tratta di scegliere un sistema di $l - (n - 1)$ correnti che soddisfi automaticamente la LKC ai nodi e che richieda quindi soltanto la scrittura della LKT alle maglie. Per costruire un tale sistema consideriamo un insieme di maglie fondamentali del circuito in esame. Abbiamo già visto che attraverso la scelta di un albero è facile individuare un sistema di tale tipo. Associamo ora ad ogni maglia una corrente di maglia ed esprimiamo la corrente in ogni lato come la somma o differenza di correnti di maglia - di cui il lato in questione rappresenta la parte in comune - a seconda dei versi scelti per le correnti di maglia.

Facciamo un esempio in cui introduciamo le correnti di maglia: facciamo riferimento alla Fig. 3.21 dove abbiamo scelto le maglie fondamentali m_1 (rossa) e m_2 (verde) (vedi la Fig. 3.18) e ad esse associate le correnti di maglia J_1 e J_2 .

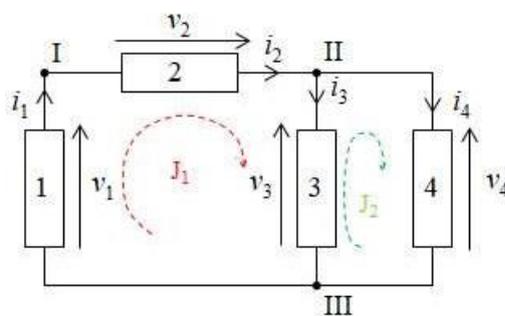


Fig. 3.21 – Circuito con maglie e correnti di maglia.

Per questa scelta di correnti di maglia abbiamo che le correnti di lato sono legate alle correnti di maglia appena introdotte nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= J_1 \\
 i_2 &= J_1 \\
 i_3 &= J_1 - J_2 \\
 i_4 &= J_2
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

Si osservi come le (3.36) (3.36) sono analoghe alle (3.23) (3.23)!

Abbiamo in pratica dimostrato l'assunto perché abbiamo trovato $l - (n - 1)$ incognite - una per ogni maglia - attraverso le quali è possibile esprimere tutte le l correnti di ramo. Orbene tali incognite **correnti di maglia** godono, per costruzione, della proprietà di soddisfare la LKC ai nodi. Infatti, in ogni nodo una corrente di maglia entra ed esce e quindi le LKC ai nodi, scritte in termini di correnti di maglia, si riconducono a pure identità. Ad esempio, per il nodo 3 della Fig. 3.21 abbiamo:

$$J_1 + (-J_1 + J_2) - J_2 = 0 \tag{3.37}$$

Per ottenere il sistema di equazioni circuitali occorrerà scrivere la sola LKT con le correnti da maglia. Il sistema di $l-(n-1)$ equazioni nelle $l-(n-1)$ incognite (le correnti di maglia) che ci occorre per risolvere il circuito, si può facilmente ottenere scrivendo le equazioni dettate dalla LKT alle $l-(n-1)$ maglie fondamentali esprimendo però, attraverso le relazioni caratteristiche, le tensioni nei singoli lati mediante le correnti di maglia.

Faremo un esempio nel § 5.4 della Lezione 4.

Osserviamo che poiché con il metodo dei potenziali di nodo dobbiamo risolvere $n-1$ equazioni e con il metodo delle correnti di maglia dobbiamo risolvere $l-(n-1)$ equazioni, possiamo decidere quale dei due metodi utilizzare valutando i due numeri: $n-1$ ed $l-(n-1)$ e optando per il metodo corrispondente al numero minore di equazioni.

7 Le proprietà di non amplificazione

Due proprietà analoghe dei circuiti, che discendono dal fatto che per essi valgono la LKT e la LKC, sono il principio di non amplificazione delle tensioni e il principio di non amplificazione delle correnti. Diamo gli enunciati.

Principio di non amplificazione delle tensioni: *se in una rete di bipoli strettamente passivi esiste un solo bipolo (lato) attivo, allora il potenziale dei due nodi a cui il lato si appoggia sono l'uno il massimo e l'altro il minimo tra tutti i potenziali dei nodi della rete, e quindi la tensione sul lato attivo sarà la massima all'interno della rete.*

Non ne diamo la dimostrazione ma osserviamo che in ogni rete deve pur esserci un nodo a potenziale minimo ed uno a potenziale massimo; la proprietà appena enunciata ci dice che tali potenziali sono assunti dai due nodi dell'unico lato attivo. Qualcuno avrà forse riconosciuto in questa affermazione il riflesso di quella proprietà di cui gode la funzione potenziale elettrico: essa, infatti, non può avere né massimi né minimi nei punti interni del suo dominio di definizione. Massimi e minimi sono assunti sui punti della frontiera.

Principio di non amplificazione delle correnti: *se in una rete di bipoli strettamente passivi esiste un solo bipolo (lato) attivo, allora la corrente che attraversa quest'unico lato attivo sarà la massima tra tutte le correnti dei lati nella rete.*

Osserviamo che i due teoremi di non amplificazione valgono soltanto in regime stazionario e non in regime dinamico, ossia allorquando sono presenti dei bipoli dinamici. Essi non valgono, inoltre, in presenza di due elementi attivi ed allorquando nella rete vi sono elementi passivi (e non strettamente passivi), come ad esempio corto-circuiti o circuiti aperti.

8 Il teorema di Tellegen

Consideriamo due circuiti aventi la stessa topologia, senza necessariamente avere stessi bipoli. Scegliamo i versi delle correnti e delle tensioni in entrambi i circuiti in maniera da avere la stessa convenzione su tutti i lati dei due circuiti.

Consideriamo le tensioni (le correnti) di un circuito e le correnti (le tensioni) dell'altro.

Enunciamo il seguente teorema:

Teorema di Tellegen: *La somma dei prodotti tensione di un circuito per corrente dell'altro circuito relativi a lati corrispondenti è nulla, avendo fatto la stessa convenzione su tutti i bipoli dei due circuiti.*

In formule, per un circuito in cui esistono l lati e dove abbiamo fatto la medesima convenzione su tutti i bipoli, il teorema si presenta come:

$$\sum_{i=1}^l i v_i = \sum_{i=1}^l i_i v_i = 0 \quad (3.38)$$

Nell'enunciato del teorema abbiamo ipotizzato di fare la stessa convenzione su tutti i bipoli dei due circuiti. Nel valutare la somma quindi sceglieremo lo stesso segno per tutti i prodotti della sommatoria. Se facciamo la convenzione dell'utilizzatore su tutti i bipoli, nella (3.38) (3.38), sommeremo "potenze virtuali assorbite", viceversa se facciamo la convenzione del generatore sommeremo "potenze virtuali erogate". Nel caso contrario in cui i due circuiti hanno sui loro bipoli convenzioni diverse dovremmo tenerne conto nella sommatoria considerando il segno appropriato davanti ad ogni termine. Nel seguito faremo un esempio che chiarirà questo punto.

Usiamo l'accezione **potenze virtuali** poiché i singoli prodotti rappresentano qualcosa che "somiglia" ad una potenza. I termini della sommatoria hanno la "forma" e la dimensione di una potenza anche se di fatto non hanno alcun significato fisico riferendosi a due bipoli diversi tra loro. Solo nel caso in cui i due circuiti abbiano gli stessi bipoli, quelle potenze sono proprio delle potenze reali.

Questo teorema, come le leggi di Kirchhoff, dipende solo dalla topologia del circuito. Si può far vedere che un circuito che verifica una delle due leggi di Kirchhoff e il teorema di Tellegen è tale da verificare anche l'altra legge di Kirchhoff. Cioè:

Teorema di Tellegen + LKC \square LKT

oppure

Teorema di Tellegen + LKT \square LKC

Facciamo un esempio di applicazione del teorema.

I circuiti di Fig. 3.22 hanno la stessa topologia ma non per forza hanno stessi bipoli nei lati che si corrispondono. Abbiamo indicato le grandezze del primo circuito senza apice e le grandezze del secondo circuito con l'apice. Si osservi che abbiamo fatto convenzioni diverse sui bipoli. In particolare, rileviamo la convenzione dell'utilizzatore sui lati 3 e 4, e abbiamo fatto la convenzione del generatore sui lati 1 e 2.

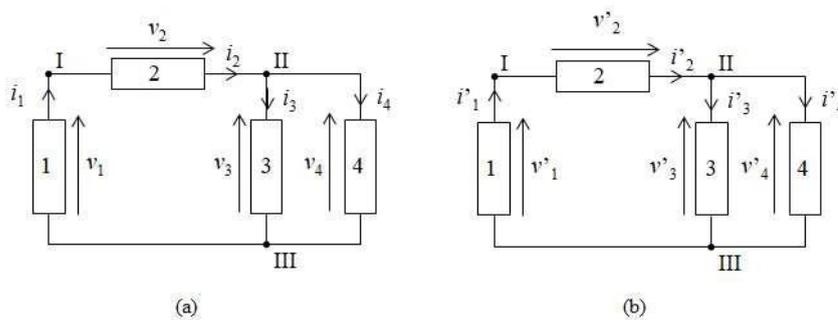


Fig. 3.22 \square Due circuiti diversi aventi la stessa topologia.

Scegliamo di sommare potenze assorbite.

Il teorema afferma che¹¹:

$$\square i_1 v_1 \square i_2 v_2 + i_3 v_3 + i_4 v_4 = 0 \quad (3.39)$$

¹¹ In tutto il paragrafo, per semplicità di notazione, ometteremo la dipendenza dal tempo che quindi verrà intesa implicita in tutte le formule che seguono.

In questo caso abbiamo considerato le correnti del primo e le tensioni del secondo. Potremo anche scrivere il duale:

$$\sum i_1 v_1 - \sum i_2 v_2 + \sum i_3 v_3 + \sum i_4 v_4 = 0 \quad (3.40)$$

Nella (3.39) (3.39) e nella (3.40) (3.40) abbiamo considerato con il segno negativo i lati in cui abbiamo fatto la convenzione del generatore e positivi quelli con la convenzione dell'utilizzatore perché abbiamo deciso di sommare le potenze assorbite.

Il teorema ci dice che la somma delle potenze virtuali (non virtuali se i circuiti sono uguali) assorbite è nulla.

Le (3.39) e (3.40) rappresentano un bilancio di potenze, cioè:

potenza assorbita nei lati con convenzione dell'utilizzatore + potenza assorbita nei lati con convenzione del generatore = 0.

Che equivale a:

potenza assorbita nei lati con convenzione dell'utilizzatore = potenza erogata nei lati con convenzione del generatore.

Nel nostro caso si ha dalla (3.39) (3.39):

$$\sum_{i=1}^2 i v_i = \sum_{i=3}^4 i v_i \quad (3.41)$$

Potenza virtuale erogata da alcuni bipoli Potenza virtuale assorbita dal resto del circuito

Al primo membro abbiamo una potenza erogata, perché su quei bipoli abbiamo fatto la convenzione del generatore.

A questo punto dimostriamo il teorema.

Vogliamo dimostrare la validità della (3.38). Consideriamo la sommatoria presente nella (3.38):

$$\sum_{i=1}^l i v_i \quad (3.42)$$

Ricordiamo che per la (3.38) (3.38) abbiamo fatto stessa convenzione su tutti i bipoli.

La (3.42) (3.42) può essere riscritta come prodotto scalare:

$$\sum_{i=1}^l i v_i = \mathbf{i}^T \mathbf{v}' \quad (3.43)$$

dove al secondo membro abbiamo un prodotto scalare tra un vettore riga, essendo $\mathbf{i}^T = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$, e un vettore colonna $\mathbf{v}' = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}^T$. Sostituendo la (3.27) (3.27) nella

(3.43) (3.43), otteniamo:

$$\mathbf{i}^T \mathbf{v}' = \mathbf{i}^T \mathbf{A}^T \mathbf{v} \quad (3.44)$$

che possiamo riscrivere, utilizzando la proprietà delle matrici trasposte $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$, come:

$$\mathbf{i}^T \mathbf{A}^T \mathbf{v} = (\mathbf{A}^T \mathbf{i})^T \mathbf{v} = 0 \quad (3.45)$$

Grazie alla (3.45) (3.45), dovendo valere la (3.17), il teorema di Tellegen è dimostrato! In particolare, abbiamo dimostrato la prima sommatoria essere nulla. Si osservi che, poiché la matrice di incidenza è uguale per entrambi i circuiti su cui agisce il teorema di Tellegen in quanto dipende da come sono connessi i bipoli e non dalla natura dei singoli bipoli, la dimostrazione della seconda sommatoria della (3.38) (3.38) si può dimostrare in modo analogo.

Il teorema di Tellegen appena enunciato è un'estensione di una proprietà fondamentale dei circuiti elettrici, nota come "conservazione delle potenze elettriche" (si omette qui la dimostrazione in quanto identica a quella appena mostrata), alle potenze virtuali ossia al caso di due circuiti DIVERSI ma aventi lo stesso grafo orientato. In particolare, la scelta di presentare qui questo secondo caso vuole sottolineare che la proprietà di conservazione delle potenze elettriche per un dato circuito (o di quelle virtuali, nel caso di Tellegen) è una diretta conseguenza delle SOLE leggi di Kirchhoff. Per completezza, enunciamo la proprietà di conservazione delle potenze elettriche:

la somma delle potenze elettriche assorbite (erogate) da TUTTI i bipoli di un circuito è istante per istante uguale a zero.

Indice delle figure

Fig. 3.1 – Connessione di bipoli per la realizzazione di un circuito	6
Fig. 3.2 □ Nodo che collega due bipoli (A) e nodo che collega tre bipoli (B)	7
Fig. 3.3 – a: Esempio di grafo connesso; b: Esempio di grafo non connesso	8
Fig. 3.4 – Un grafo (a) e lo stesso orientato (b)	9
Fig. 3.5 – Tutti i possibili alberi del grafo di Fig. 3.4a (____) e i rispettivi co-alberi (-----).	10
Fig. 3.6 – (a): Esempi di maglie nel circuito di Fig. 3.4a; (b): le relative maglie orientate (arbitrariamente).....	11
Fig. 3.7 – Due grafi aventi n nodi e l lati. Quante maglie ci sono in ognuno di loro?	11
Fig. 3.8 – Maglie relative a tutte le possibili scelte di albero del grafo di Fig. 3.4a. Maglie fondamentali.....	13
Fig. 3.9 – (a): un grafo con $n=4$ e $l=5$; (b): tutti (6) gli insiemi di taglio possibili del grafo di (a).....	14
Fig. 3.10 – Alberi possibili per il grafo di Fig. 3.9a.....	15
Fig. 3.11 – Una delle possibili terne di insiemi di taglio fondamentali per il grafo di Fig. 3.9a.....	15
Fig. 3.12 – Versi di riferimento (arbitrari) per correnti e tensioni	17
Fig. 3.13 – Un esempio di nodo con le relative correnti	19
Fig. 3.14 – Esempio di circuito con tre nodi e 3 insiemi di taglio	19
Fig. 3.15 – Esempio di circuito con 4 nodi e 6 insiemi di taglio	20
Fig. 3.16 – Maglie nel circuito di Fig. 3.14	21
Fig. 3.17 – Esempio di circuito	28
Fig. 3.18 – Insieme di maglie fondamentali per il circuito di Fig. 3.17.....	31
Fig. 3.19 – Esempio di circuito con stessa convenzione su tutti i bipoli	33

Fig. 3.20 □ Circuito dinamico lineare.....	36
Fig. 3.21 – Circuito con maglie e correnti di maglia	40
Fig. 3.22 □ Due circuiti diversi aventi la stessa topologia.....	44

Domande

Teoria

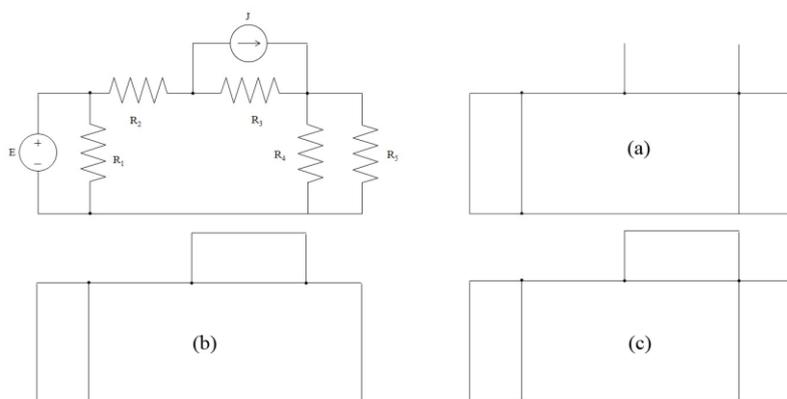
La soluzione di un circuito elettrico

- 3.1) Da cosa dipende il valore delle grandezze presenti in un circuito in ogni istante?
- 3.2) Cosa si intende con cercare la soluzione di un circuito?
- 3.3) Cosa si intende con conoscere il funzionamento di un circuito?
- 3.4) Da che fattori dipende la soluzione di un circuito?
- 3.5) Da cosa derivano le equazioni del sistema che descrive il funzionamento di un circuito elettrico?
- 3.6) Cosa serve aggiungere al sistema di equazioni ottenute con le relazioni caratteristiche e le leggi di Kirchhoff per ottenere un'unica soluzione?
- 3.7) Cosa si intende con "topologia"?

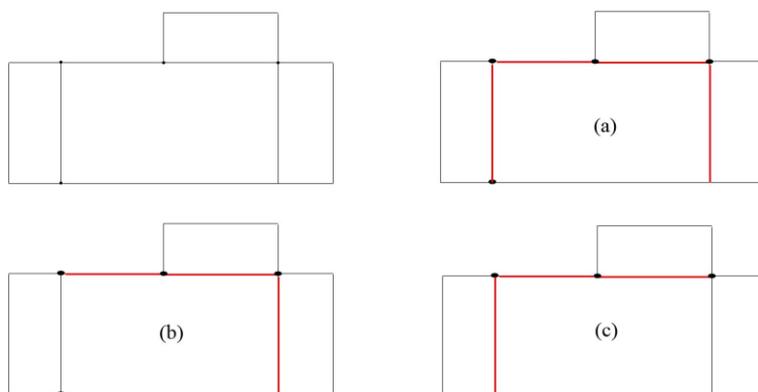
Nozioni di topologia circuitale

- 3.8) Cosa rappresenta un "nodo" di un circuito? (Considerare anche ramo, lato, grafo, sotto-grafo, grafo orientato, grafo connesso, grafo non connesso, albero, co-albero, maglia, insieme di taglio)
- 3.9) Quando una maglia si dice orientata?
- 3.10) Quando un insieme di taglio si dice orientato?
- 3.11) Cosa si intende per maglia fondamentale?
- 3.12) Cosa si intende per insieme di taglio fondamentale?
- 3.13) Quando è che il grafo si dice connesso?
- 3.14) Quanti alberi ci sono in un grafo?
- 3.15) Quanti co-alberi ci sono in un grafo?
- 3.16) Quanti lati ci sono in un albero?

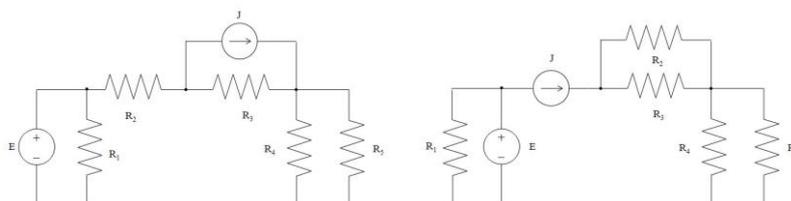
- 3.17) Quanti lati ci sono in un co-albero?
- 3.18) A cosa servono le frecce presenti nei lati di un grafo?
- 3.19) Per un circuito con n nodi ed l lati, il numero di maglie fondamentali è pari a:
- 3.20) Per un circuito con n nodi ed l lati, il numero di insiemi di taglio fondamentali è pari a:
- 3.21) Per il circuito di figura, quali dei grafi proposti, rappresenta il suo grafo?



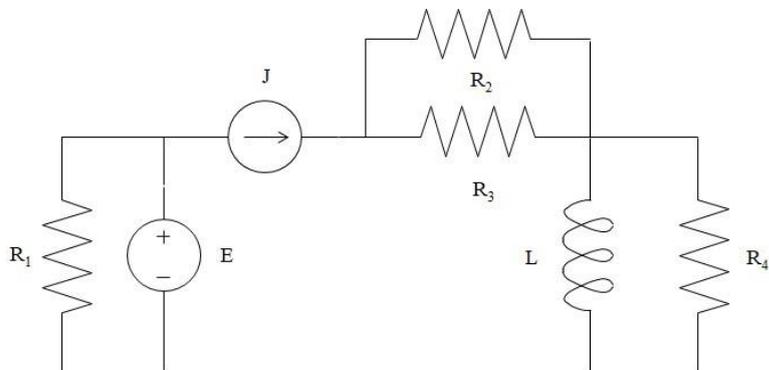
- 3.22) Dato il grafo di figura, quale dei tre insiemi di lati indicati in rosso NON rappresenta un albero del grafo?



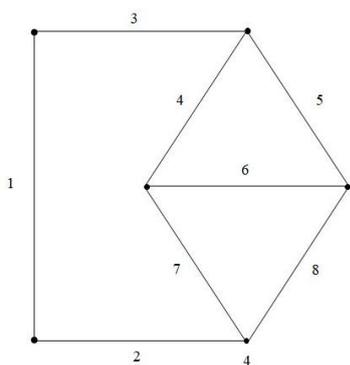
- 3.23) I due circuiti di figura sono topologicamente uguali?



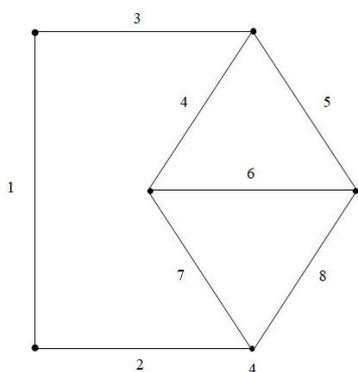
- 3.24) Per il circuito di figura dire quanti nodi (n) ci sono (la stessa domanda per lati (l), maglie (m), maglie fondamentali (m_f), insiemi di taglio (T), insiemi di taglio fondamentali (T_f)?)



- 3.25) Dato il grafo di un circuito, quale, tra i seguenti insiemi di lati, NON è un insieme di taglio (maglia)?



- 3.26) Dato il grafo in figura, stabile quali dei seguenti insiemi di lati costituiscono un albero (co-albero)?



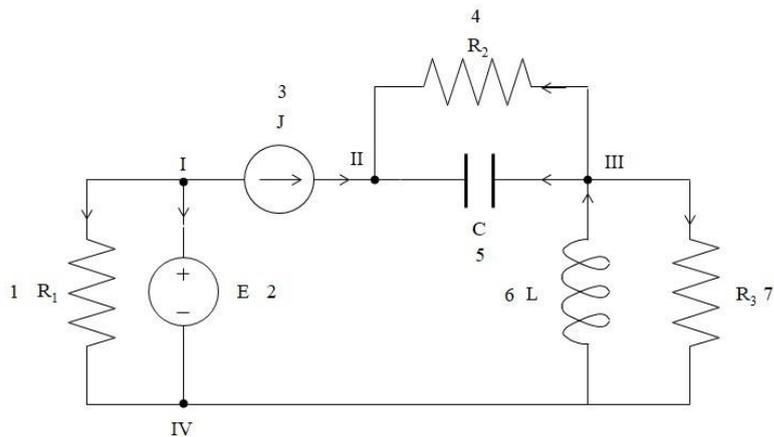
- 3.27) Quale tra le seguenti è la condizione necessaria e sufficiente affinché due circuiti siano topologicamente uguali?

Leggi di Kirchhoff

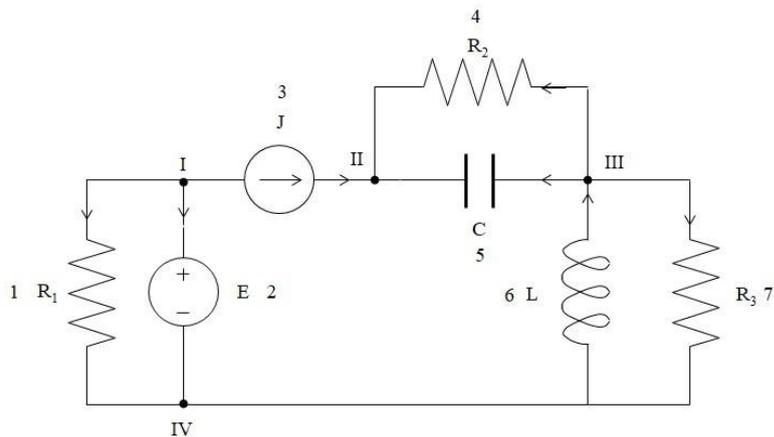
- 3.28) Le leggi di Kirchhoff valgono per circuiti....
- 3.29) Le leggi di Kirchhoff valgono SOLO per circuiti....
- 3.30) Nelle definizioni della prima e seconda legge di Kirchhoff perché si parla di somma algebrica?
- 3.31) Da cosa derivano le leggi di Kirchhoff?

La I Legge di Kirchhoff

- 3.32) Che significa l'acronimo LKC?
- 3.33) Quale, tra i seguenti enunciati, è un enunciato corretto delle LKC?
- 3.34) Quale, tra i seguenti enunciati, NON è un enunciato corretto delle LKC?
- 3.35) Quale è un enunciato corretto ed esaustivo della I legge di Kirchhoff:
- 3.36) Per un circuito con n nodi ed l lati, con le LKC si possono scrivere un numero di equazioni pari a:
- 3.37) Per un circuito con n nodi ed l lati, con le LKC si possono scrivere un numero di equazioni indipendenti pari a:
- 3.38) Per un circuito con 4 nodi ed 8 lati, con la LKC si possono scrivere un numero di equazioni indipendenti pari a:
- 3.39) La I legge di Kirchhoff deriva da uno dei seguenti principi:
- 3.40) Per il circuito di figura, scrivere tutte le possibili equazioni delle LKC (ogni lato è numerato con un numero arabo e ogni nodo con un numero romano).



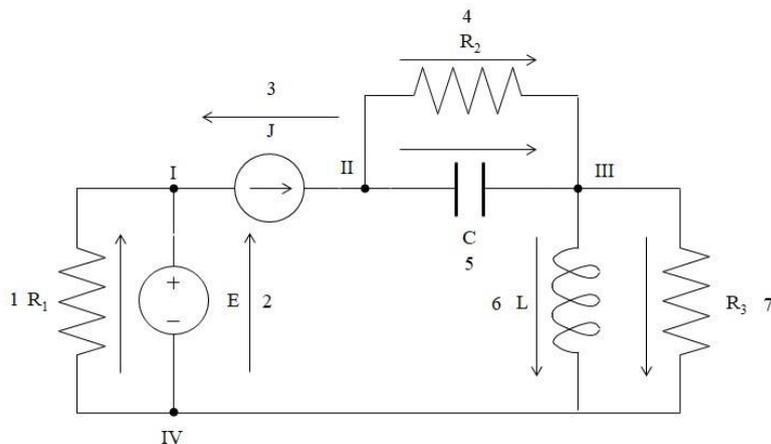
- 3.41) Per il circuito di figura, scrivere un insieme di equazioni LKC linearmente indipendenti (ogni lato è numerato con un numero arabo e ogni nodo con un numero romano).



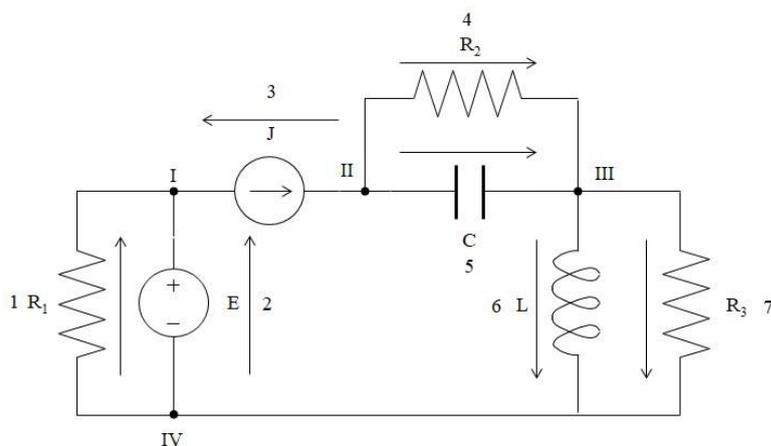
La II Legge di Kirchhoff

- 3.42) Che significa l'acronimo LKT?
- 3.43) Quale, tra i seguenti enunciati, è un enunciato corretto delle LKT?
- 3.44) Quale, tra i seguenti enunciati, NON è un enunciato corretto delle LKT?
- 3.45) Quale è un enunciato corretto ed esaustivo della II legge di Kirchhoff:
- 3.46) Per un circuito con n nodi ed l lati, con le LKT si possono scrivere un numero di equazioni pari a:

- 3.47) Per un circuito con n nodi ed l lati, con le LKT si possono scrivere un numero di equazioni indipendenti pari a:
- 3.48) Per un circuito con 4 nodi ed 8 lati, con la LKT si possono scrivere un numero di equazioni indipendenti pari a:
- 3.49) La II legge di Kirchhoff deriva da uno dei seguenti principi:
- 3.50) Per il circuito di figura, scrivere tutte le possibili equazioni delle LKT (ogni lato è numerato con un numero arabo e ogni nodo con un numero romano).

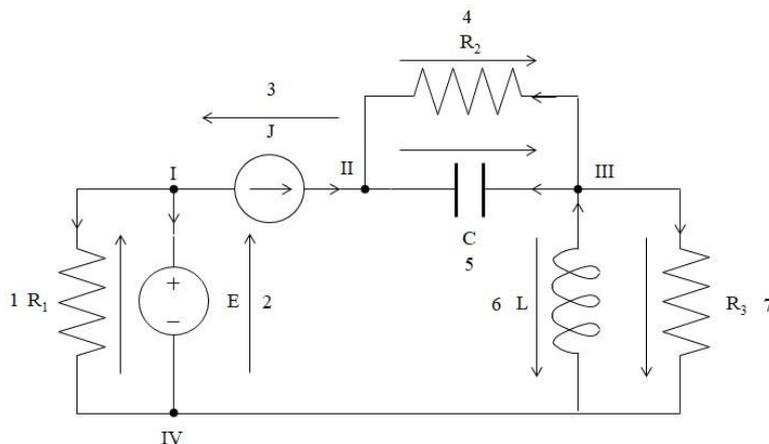


- 3.51) Per il circuito di figura, scrivere un insieme di equazioni LKT linearmente indipendenti (ogni lato è numerato con un numero arabo e ogni nodo con un numero romano).



Il sistema di interconnessione

- 3.52) Cosa si intende per sistema di equazioni d'interconnessione?
- 3.53) Da quante equazioni è costituito il sistema di equazioni d'interconnessione?
- 3.54) Quali leggi consentono di scrivere il sistema di equazioni d'interconnessione?
- 3.55) Da cosa deriva il sistema di equazioni d'interconnessione?
- 3.56) Da quali equazioni è costituito il sistema di equazioni d'interconnessione?
- 3.57) Per il circuito di figura, scrivere un sistema di equazioni d'interconnessione (ogni lato è numerato con un numero arabo e ogni nodo con un numero romano).



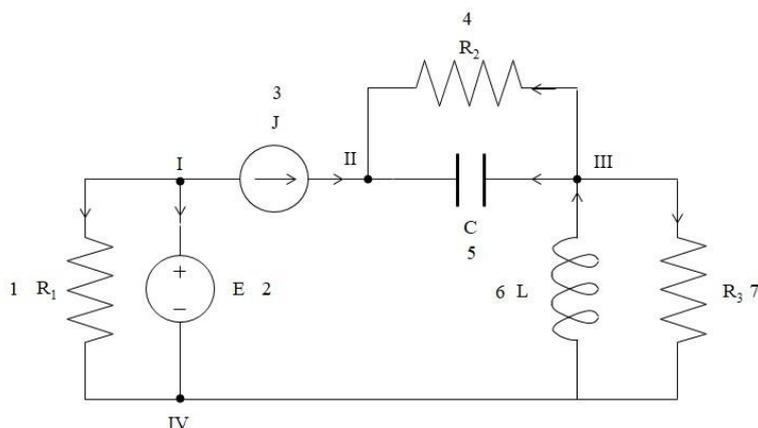
Leggi di Kirchhoff in forma matriciale

- 3.58) Quale è la convenienza di usare la forma matriciale per le leggi di Kirchhoff?
- 3.59) Quali sono le matrici che consentono la scrittura delle leggi di Kirchhoff in forma matriciale?

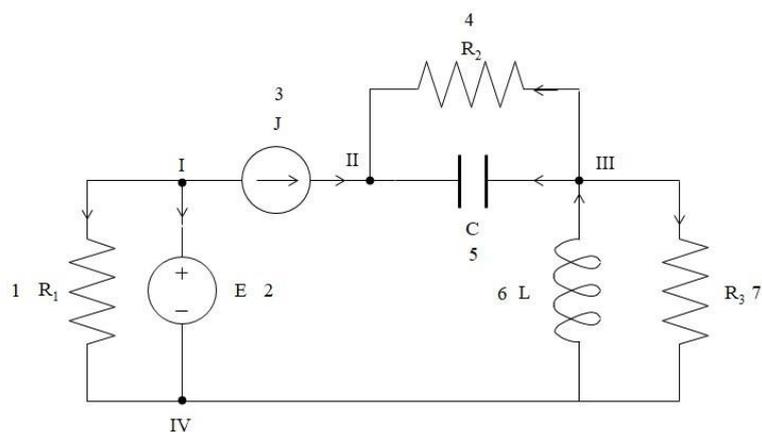
La matrice d'incidenza e la I legge di Kirchhoff

- 3.60) Quante sono le righe e le colonne della matrice d'incidenza? (n numero di nodi e l numero di lati di un circuito)
- 3.61) Quante sono le righe e le colonne della matrice d'incidenza ridotta? (n numero di nodi e l numero di lati di un circuito)

- 3.62) Quali possono essere i valori degli elementi della matrice d'incidenza?
- 3.63) Quando accade che un elemento della matrice d'incidenza \mathbf{A} ha valore 0 (-1, 1)?
- 3.64) Quale è l'equazione matriciale derivata dalla I legge di Kirchhoff che utilizza la matrice d'incidenza ridotta \mathbf{A}_r ?
- 3.65) Che dimensioni ha la matrice d'incidenza (n = numero nodi, l = numero lati)?
- 3.66) Che dimensioni ha la matrice d'incidenza ridotta (n = numero nodi, l = numero lati)?
- 3.67) Quante righe devo eliminare dalla matrice d'incidenza \mathbf{A} per ottenere la matrice d'incidenza ridotta \mathbf{A}_r ?
- 3.68) Quale delle righe devo eliminare dalla matrice \mathbf{A} per ottenere la matrice ridotta \mathbf{A}_r ?
- 3.69) Come si ottiene la matrice d'incidenza ridotta \mathbf{A}_r dalla matrice d'incidenza \mathbf{A} ?
- 3.70) Perché è possibile fissare a zero il valore del potenziale del nodo che abbiamo scartato nella scrittura delle equazioni della I legge di Kirchhoff?
- 3.71) Dato il circuito di figura, in cui abbiamo dato un verso alle correnti di lato, scrivere la matrice d'incidenza \mathbf{A} (ogni lato è numerato con un numero arabo e ogni nodo con un numero romano).

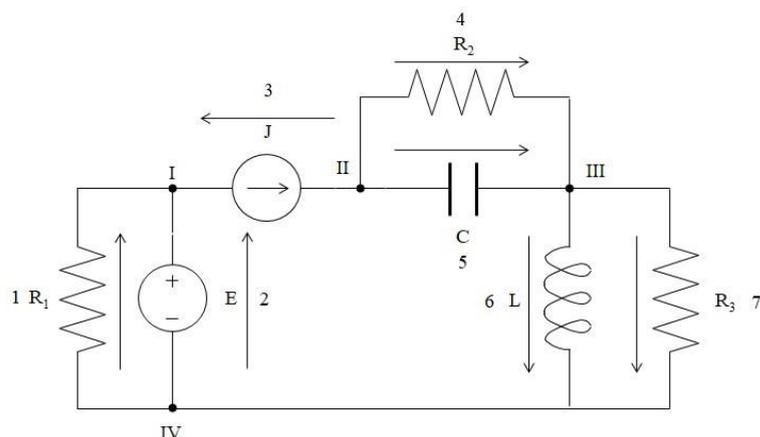


- 3.72) Dato il circuito di figura, in cui abbiamo dato un verso alle correnti di lato, scrivere la matrice d'incidenza \mathbf{A}_r (ogni lato è numerato con un numero arabo e ogni nodo con un numero romano).



La matrice di maglia fondamentale e la II legge di Kirchhoff

- 3.73) Quante sono le righe e le colonne della matrice di maglia fondamentale \mathbf{B}_f ? (n numero di nodi e l numero di lati di un circuito)
- 3.74) Quali possono essere i valori degli elementi della matrice di maglia fondamentale \mathbf{B}_f ?
- 3.75) Quando accade che un elemento della matrice di maglia fondamentale \mathbf{B}_f ha valore 0 (-1, 1)?
- 3.76) Quale è l'espressione corretta dell'equazione matriciale derivata dalla II legge di Kirchhoff che utilizza la matrice d'incidenza ridotta \mathbf{B}_f ?
- 3.77) Che dimensioni ha la matrice d'incidenza ridotta (n = numero nodi, l = numero lati)?
- 3.78) Dato il circuito di figura, in cui abbiamo dato un verso alle tensioni di lato, scrivere la matrice di maglia fondamentale \mathbf{B}_f (ogni lato è numerato con un numero arabo e ogni nodo con un numero romano).



Il sistema d'interconnessione in forma matriciale

- 3.79) Quale tra i seguenti sistemi di equazioni è la rappresentazione di un sistema d'interconnessione in forma matriciale?
- 3.80) Quanti modi possibili conosciamo per rappresentare il sistema d'interconnessione in forma matriciale?
- 3.81) Quali tra le seguenti matrici NON è utilizzata per il sistema d'interconnessione in forma matriciale?

Il sistema di equazioni circuitali

- 3.82) Cosa consente di scrivere le equazioni del sistema di equazioni circuitali?
- 3.83) Da cosa è formato il sistema di equazioni circuitali?
- 3.84) In generale, che tipo di sistema di equazioni è il sistema di equazioni circuitali di un circuito dinamico lineare?
- 3.85) Da quante equazioni è costituito il sistema di equazioni circuitali per un circuito con n nodi ed l lati?
- 3.86) Al fine di determinare la soluzione di un circuito, quando NON è necessario conoscere lo stato iniziale di cui si trova un circuito?

Il metodo dei potenziali di nodo

- 3.87) Dato un circuito con n nodi ed l lati, quale metodo conviene di più tra quello dei potenziali di nodo e quello delle correnti di maglia?
- 3.88) Cosa sono i potenziali di nodo di un circuito?
- 3.89) Cosa si intende per *nodo di terra*?
- 3.90) Cosa s'intende per *nodo di riferimento*?
- 3.91) Quante equazioni scriviamo con il metodo dei potenziali di nodo?
- 3.92) Quali sono le incognite del sistema che scriviamo con il metodo dei potenziali di nodo?
- 3.93) Quali equazioni si utilizzano per scrivere il sistema di equazioni risolutivo di un circuito con il metodo dei potenziali di nodo?
- 3.94) Che relazione esiste tra le tensioni di lato di un circuito e i potenziali di nodo?

Il metodo delle correnti di maglia

- 3.95) Cosa sono le correnti di maglia di un circuito?
- 3.96) Come possiamo ricavare le correnti di lato in funzione delle correnti di maglia?
- 3.97) Quante equazioni scriviamo con il metodo delle correnti di maglia?
- 3.98) Quali sono le incognite del sistema che scriviamo con il metodo delle correnti di maglia?
- 3.99) Quali equazioni si utilizzano per scrivere il sistema di equazioni risolutivo di un circuito con il metodo delle correnti di maglia?

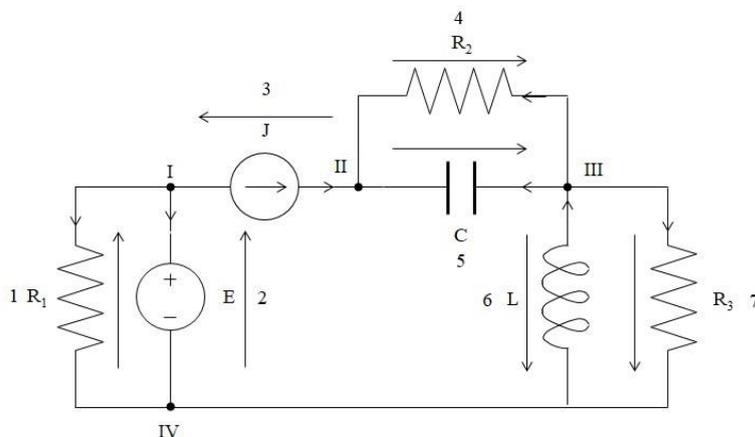
Le proprietà di non amplificazione

- 3.100) Tra i seguenti, qual è l'enunciato corretto della proprietà di non amplificazione di un circuito resistivo?
- 3.101) Quando è possibile applicare la proprietà di non amplificazione delle correnti?

- 3.102) Quando è possibile applicare la proprietà di non amplificazione delle tensioni?
- 3.103) Quando NON è possibile applicare la proprietà di non amplificazione delle correnti o delle tensioni?

Teorema di Tellegen

- 3.104) Perché il teorema di Tellegen si chiama anche teorema di conservazione delle potenze "virtuali"?
- 3.105) Il Teorema di Tellegen vale per circuiti:
- 3.106) Il teorema di Tellegen NON vale per i seguenti tipi di circuiti:
- 3.107) Il teorema di Tellegen insieme alla I IdK (II IdK) implica
- 3.108) Considerato un circuito di bipoli con l lati dove su ogni lato si è fatta una convenzione arbitraria (generatore o utilizzatore), quali dei seguenti enunciati del teorema di Tellegen è corretto:
- 3.109) Quand'è che le potenze virtuali possono essere considerate potenze effettive?
- 3.110) Il teorema di Tellegen viene detto anche:
- 3.111) Cosa garantisce la conservazione della potenza complessiva in un circuito?
- 3.112) Dato il circuito di figura, quale delle seguenti espressioni rappresenta correttamente il teorema di Tellegen (ogni lato è numerato con un numero arabo e ogni nodo con un numero romano)?



3.113) Data la matrice d'incidenza ridotta \mathbf{A}_r , quale delle seguenti espressioni rappresenta la dimostrazione del teorema di Tellegen?