Grafico di una retta

La retta si puo' presentare nella forma:
$y = mx + q$ (forma esplicita)
Per tracciarla basta trovare due suoi punti (per due punti passa una sola retta)
esempio
$y = 2x + 6$
scelgo 2 valori per x a caso (ad esempio 0 e 2)
per $x = 0$ segue $y = 2\cdot0 + 6 = 6$
per $x = 2$ segue $y = 2\cdot2 + 6 = 10$
disegno nel piano i due punti A(0 , 6) B(2 , 10) e ne traccio la congiungente

---

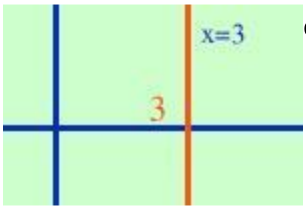
Sarebbe preferibile cercare dei punti non a caso ma seguendo un certo ragionamento: ad esempio si potrebbero trovare i punti dove la retta taglia gli assi (basta sostituire una volta x=0 e poi y=0); oppure, siccome se i punti sono troppo vicini non riesco a disegnare bene la retta, scegliere per x due valori abbastanza lontani fra loro; inoltre cerchero' di scegliere dei valori in modo che nei risultati non mi vengano frazioni che mi complicherebbero i calcoli;

Se la retta fosse nella forma
$ax + by + c = 0$ (forma implicita)
la esplicito ricavandone la y
esempio:
$2x + 3y + 6 = 0$
$3y = - 2x - 6$
$y = -2/3\ x - 6/3$
$y = -2/3\ x - 2$
poi per x scego due valori che eliminino la frazione, ad esempio 0 e 3
per $x = 0$ segue $y = -2/3 \cdot 0 - 2 = -2$
per $x = 3$ segue $y = -2/3 \cdot 3 - 2 = -2 -2 = -4$

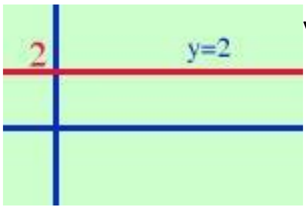
disegno nel piano i due punti A(0 , -2) B(3 , -4) e ne traccio la congiungente

---

La retta potrebbe anche essere nella forma x = numero
in tal caso si tratta di una retta verticale che passa il punto A(0,numero)
oppure nella forma y = numero
in tal caso si tratta di una retta orizzontale che passa il punto A(numero,0)

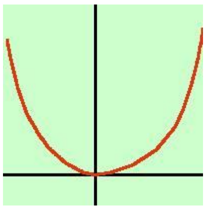


esempio: x = 3 e' la retta in cui tutte le x hanno valore 3



y = 2 e' la retta in cui tutte le y hanno valore 2

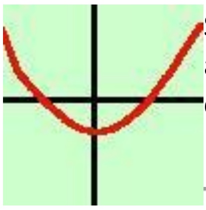
Grafico di una parabola



La parabola si puo' presentare nella forma:

$y = ax^2$ Per tracciarla basta ricordare che si tratta della parabola con vertice nell'origine e con concavita' (come nella figura) verso l'alto se $a > 0$, altrimenti la concavita' e' verso il basso

---



Se invece e' nella forma $y = ax^2 + c$
allora e' come la precedente ma il vertice e' spostato sulla verticale della quantita' c dall'origine (nella figura a fianco c e' negativo)

Per la forma piu'generale
$y = ax^2 + bx + c$
invece, conviene seguire questo metodo:

1. trovare le coordinate del vertice
2. trovare (se esistono) le intersezioni con l'asse x
3. trovare l' intersezione con l'asse delle y
4. unire in un grafico i punti trovati

Disegnare il grafico della parabola
$y = x^2 + 2x - 8$
seguiamo questo schema

1. trovare le coordinate del vertice
2. trovare (se esistono) le intersezioni con l'asse x
3. trovare l' intersezione con l'asse delle y
4. unire in un grafico i punti trovati

1. trovare le coordinate del vertice
   Per trovare le coordinate V_x e V_y posso applicare le formule:

   $$V_x = -\frac{b}{2a}$$

   $$V_y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

   sapendo che nel nostro caso a=1   b=2   c = -8

   $$V_x = -\frac{2}{2\cdot 1} = -1$$

$$V_y = -\frac{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}{4\cdot 1} = -\frac{4 + 32}{4} = -9$$

---

poiche' il secondo calcolo puo' facilmente portare a degli errori ai miei alunni ho insegnato a trovare solo la x e poi sostituirla nell'equazione per trovare la y
sostituisco -1 ad x nell'equazione di partenza
$y = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$
Un altro sistema e' fare la derivata prima e porla uguale a zero: infatti il vertice per la parabola e' sempre un punto di massimo o di minimo
$y' = 2x + 2$
$y' = 0$
$2x + 2= 0$
$2x = -2$
$2x/2 = -2/2$
$x = -1$
poi sostituisco -1 alla x nella funzione di partenza per trovare la y (come sopra)

Il vertice ha coordinate V(-1,-9)

2. trovare (se esistono) le intersezioni con l'asse x
possono anche non esistere cioe' la parabola puo' essere o tutta sopra o tutta sotto l'asse delle x, in tal caso si disegna senza intersezioni
Per trovare le intersezioni devo fare il sistema fra la parabola e l'asse delle x (equazione y=0)

$y = x^2 + 2x - 8$
$y = 0$

$0 = x^2 + 2x - 8$
$y = 0$

ogni uguaglianza puo' essere letta a rovescio

$x^2 + 2x - 8 = 0$
$y = 0$

con la <u>formula ridotta</u> risultava molto piu' semplice

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{[2^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)]}}{2\cdot 1}$$

$y = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$y = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$y = 0$

Ho due soluzioni : la prima

$x_1 = (-2-6)/2 = -4$
$y = 0$

la seconda

$x = (-2+6)/2 = 2$
$y = 0$

I due punti di intersezione con l'asse delle x sono A(-4,0)   B(2,0)

3. trovare l' intersezione con l'asse delle y
   Basta fare il sistema fra la parabola e l'asse delle y (equazione x=0)

$y = x^2 + 2x - 8$
$x = 0$

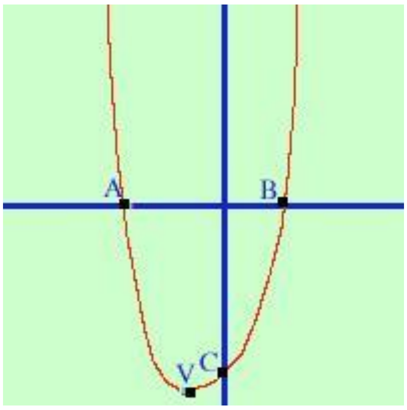
sostituisco

$y = 0^2 + 2\cdot 0 - 8 = 0$
$x = 0$

il punto di intersezione con l'asse y e' C(0,-8)
In generale il punto di intersezione con l'asse y di una funzione y=f(x) ha come primo valore zero e come secondo valore il termine noto della funzione

4. unire in un grafico i punti trovati
   puoi vedere qui a fianco il risultato
   (un po' sbilenco, la figura dovrebbe essere simmetrica e io dovrei comprarmi una tavoletta grafica)

   la forma
   $y = ax^2 + bx$
   puoi trattarla come la formula completa ricordando che l'intersezione con l'asse delle y ed una delle intersezioni con l'asse x sono entrambe nell'origine degli assi.



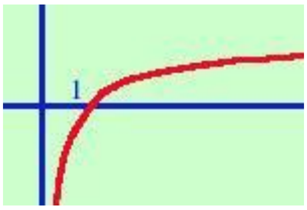
Regola generale: quando una funzione non ha il termine noto significa che passa per l'origine degli assi

Grafico della funzione logaritmica

Dobbiamo distinguere due casi:

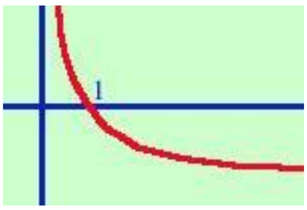
- la base del logaritmo e' maggiore di uno
- la base dal logaritmo e' compresa fra zero ed uno (in senso lato, cioe' senza gli estremi)

la base del logaritmo e' maggiore di uno:
allora, qualunque sia la base,
y = log x
ha le seguenti caratteristiche:



- la funzione e' sempre crescente
- e' definita solo per valori positivi della x
- ha un asintoto verticale nell'asse y in cui la curva tende a $-\infty$
- il punto 1,0 e' sempre di intersezione fra la curva e l'asse delle x
- all'aumentare delle x oltre il punto 1 la curva cresce molto lentamente

la base del logaritmo e' minore di 1 e maggiore di 0:
allora, qualunque sia la base in questo intervallo,
y = log x
ha le seguenti caratteristiche:

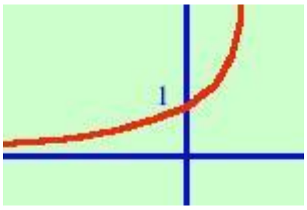


- la funzione e' sempre decrescente
- e' definita solo per valori positivi della x
- ha un asintoto verticale nell'asse y in cui la curva tende a $+\infty$
- il punto 1,0 e' sempre di intersezione fra la curva e l'asse delle x
- all'aumentare delle x oltre il punto 1 la curva diminuisce molto lentamente

il caso della base minore di zero e' un caso trattato molto raramente, in quanto di solito si lavora con logaritmi a base e;
pero' e' sempre meglio essere previdenti...

Grafico della funzione esponenziale

la funzione
$y = e^x$
ha le seguenti caratteristiche:



- la funzione e' sempre crescente
- e' sempre positiva
- ha un asintoto orizzontale nell'asse x in cui la curva tende a $-\infty$
- il punto 0,1 e' di intersezione fra la curva e l'asse delle y
- all'aumentare delle x oltre il punto 1 la curva cresce molto rapidamente

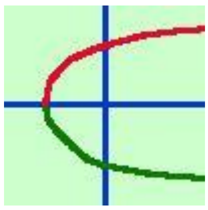
Funzione radice

Consideriamo solo il caso delle radici quadrate:
distinguiamo due sottocasi:

1. sotto radice abbiamo un polinomio di primo grado
2. sotto la radice abbiamo un polinomio di secondo grado

---

1) sotto radice abbiamo un polinomio di primo grado
si tratta di una parabola rovesciata con asse sull'asse delle x, in tal caso basta considerare solamente il ramo superiore della parabola stessa.
Facciamo un esempio, consideriamo
$y = \sqrt{(x+1)}$
se elevassi al quadrato da entrambe le parti otterrei
$y^2 = x + 1$



cioe' la parabola riferita all'asse x (io preferisco dire rovesciata anche se e' un termine non usato; e' comunque la parabola che ottieni scambiando la x con la y nell'equazione normale)
$x = y^2 - 1$
Nella figura a fianco devi considerare solo il ramo rosso della parabola perche' la radice si suppone positiva

---

2)sotto la radice abbiamo un polinomio di secondo grado
si tratta di una circonferenza con centro sull'asse delle x, in tal caso basta considerare solamente la parte superiore della circonferenza stessa.
Facciamo un semplice esempio, consideriamo

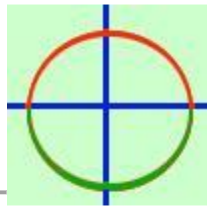
$y = \sqrt{(x^2+1)}$

se elevassi al quadrato da entrambe le parti otterrei

$y^2 = x^2 + 1$

cioe' la circonferenza di centro l'origine e raggio 1

$x^2 + y^2 = 1$



Nella figura a fianco devi considerare solo il ramo rosso della circonferenza perche' la radice si suppone positiva

---

Se il polinomio sotto radice e' di grado superiore a due, a seconda del tipo di polinomio puo' essere conveniente estrarre di radice oppure fare lo studio completo di funzione: devi decidere caso per caso