

Funzioni reali di due o più variabili reali

Disequazioni e sistemi di disequazioni in due variabili

Una disequazione in due variabili è una relazione di disuguaglianza fra i valori di due funzioni delle due variabili x, y , definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (o in un suo sottoinsieme):

$$f(x, y) \geq g(x, y)$$

L'insieme dei valori che soddisfano una disequazione in una variabile è costituito, come si è visto, da intervalli limitati o illimitati della retta (immagine dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali), compresi fra essi l'insieme vuoto e tutto l'insieme $\mathbb{R}$. L'insieme dei valori che soddisfano una disequazione in due variabili è costituito da regioni limitate, o illimitate, del piano cartesiano (immagine dell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ delle coppie di numeri reali).

Esaminiamo dapprima le disequazioni lineari e quindi alcune semplici disequazioni di 2° grado.

Disequazioni in due variabili

Una disequazione in due variabili si dice lineare se si può ridurre a una funzione razionale intera di due variabili x e y di 1° grado:

$$ax + by + c \geq 0 \quad (\text{con } a \text{ e } b \text{ non entrambe nulli})$$

Distinguiamo i due casi:

$b \neq 0$ e $b = 0$

a) Se $b \neq 0$ si può trasformare la disequazione, dividendo per il coefficiente b , e si può mettere nella forma:

$$y \geq mx + n$$

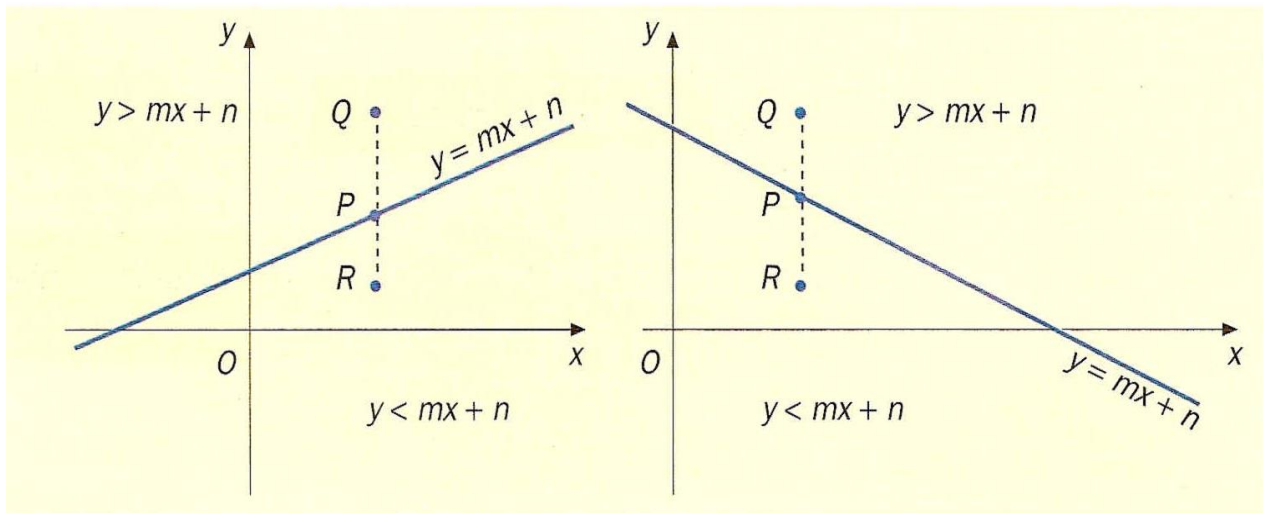
Dove

$$m = -\frac{a}{b} \qquad n = -\frac{c}{b}$$

L'equazione $y = mx + n$ è verificata dalle coppie (x, y) che sul piano cartesiano hanno per immagine i punti di una retta.

La retta $y = mx + n$ divide il piano in due semipiani tali che, per uno stesso x , le ordinate y dei punti di un semipiano superano le ordinate dei punti corrispondenti sulla retta, mentre le ordinate dei punti dell'altro semipiano sono inferiori ai

rispettivi valori sulla retta; ne segue che in un semipiano risulta verificata la disequazione $y > mx + n$, nell'altro la disequazione $y < mx + n$.



Il grafico mostra che si ha:

$$y(Q) > y(P)$$

$$y(R) < y(P)$$

Una disequazione lineare in due variabili $y \gtrless mx + n$ è soddisfatta da tutte le coppie (x,y) che appartengono a uno dei due semipiani individuati dalla retta $y = mx + n$

Nel caso di disuguaglianza debole, ossia quando vi è $\geq$, oppure $\leq$, appartiene alla soluzione anche la retta che individua il semipiano.

1 Risolvere la disequazione:

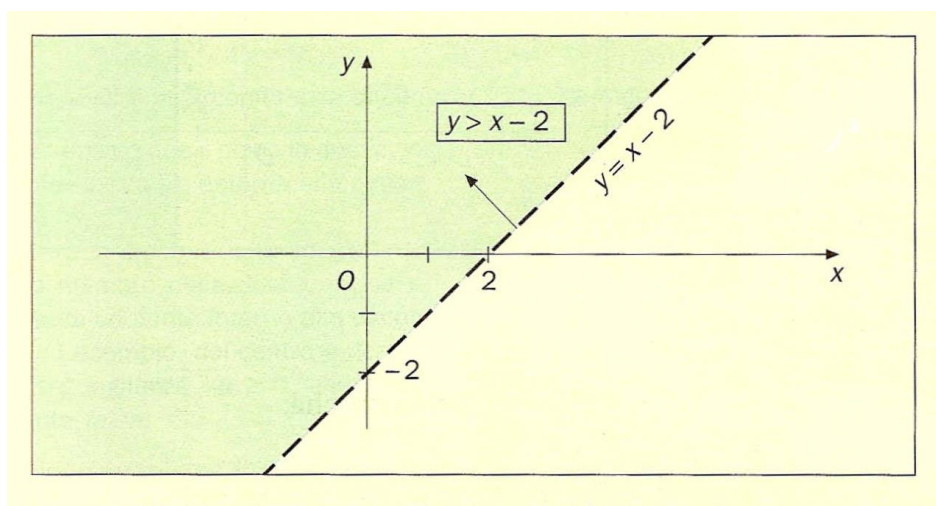
$$-x + y + 2 > 0$$

Che si può scrivere:

$$y > x - 2$$

Si traccia la retta $y = x - 2$; la soluzione è costituita dai punti del piano le cui ordinate superano le ordinate dei punti sulla retta, punti rappresentati nella figura dal semi piano colorato e indicato dalla freccia.

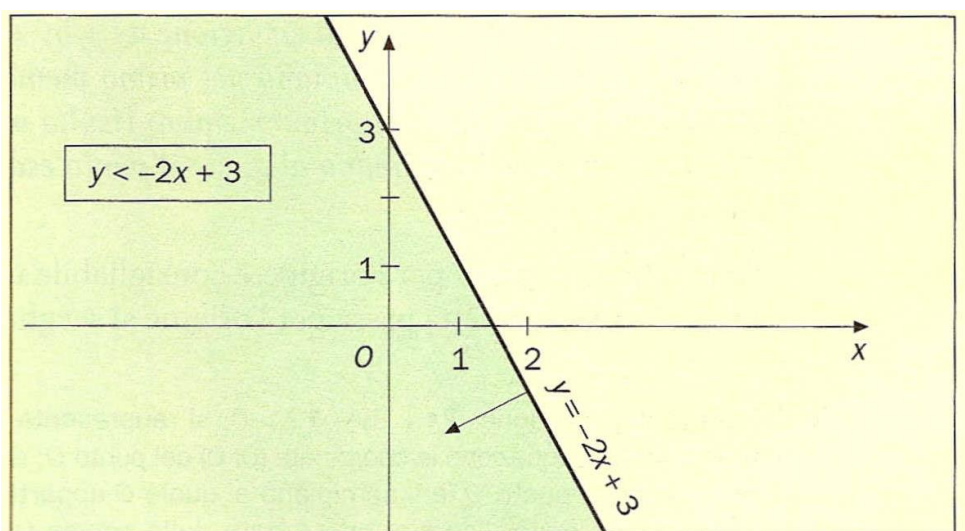
(La retta di equazione $y = x - 2$ è tratteggiata per indicare che i suoi punti non appartengono alla soluzione.)



Risolvere la disequazione: $2x + y - 3 \leq 0$ che si può scrivere:

$$y \leq -2x + 3$$

In questo caso la soluzione è costituita dai punti del piano le cui ordinate sono inferiori o eguali alle ordinate dei punti della retta $y = -2x + 3$, punti rappresentati in figura dal semipiano colorato e dai punti della retta.



b) se $b=0$ ed $a \neq 0$ la disequazione $ax + by + c \geq 0$ si può trasformare in

$$x \geq -\frac{c}{a}$$

La retta $x = -\frac{c}{a}$ è parallela all'asse y e divide il piano in due semipiani in uno dei quali i punti hanno ascissa $x > -\frac{c}{a}$ e nell'altro hanno ascissa $x < -\frac{c}{a}$

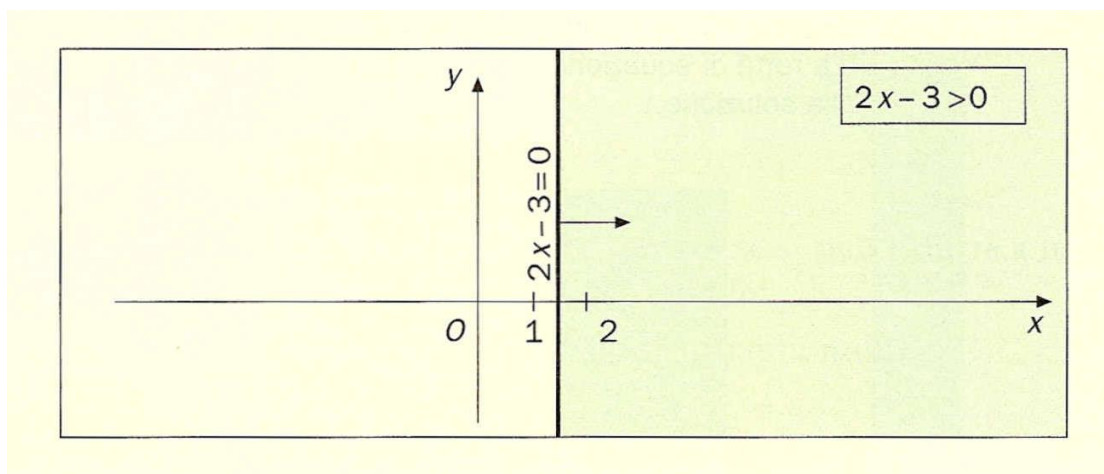
3 Risolvere la disequazione:

$$2x - 3 \geq 0$$

Che si può scrivere: $x \geq \frac{3}{2}$

La retta di equazione $x = \frac{3}{2}$ è parallela all'asse delle y .

La soluzione è il semipiano evidenziato e indicato in figura dalla freccia, compresa la retta:



Pertanto si può concludere che:

Una disequazione lineare in due variabili è soddisfatta da tutte le coppie (x, y) che si rappresentano nei punti di un semipiano, contenente o non contenente la retta origine del semipiano, secondo che la diseuguaglianza sia debole o forte.

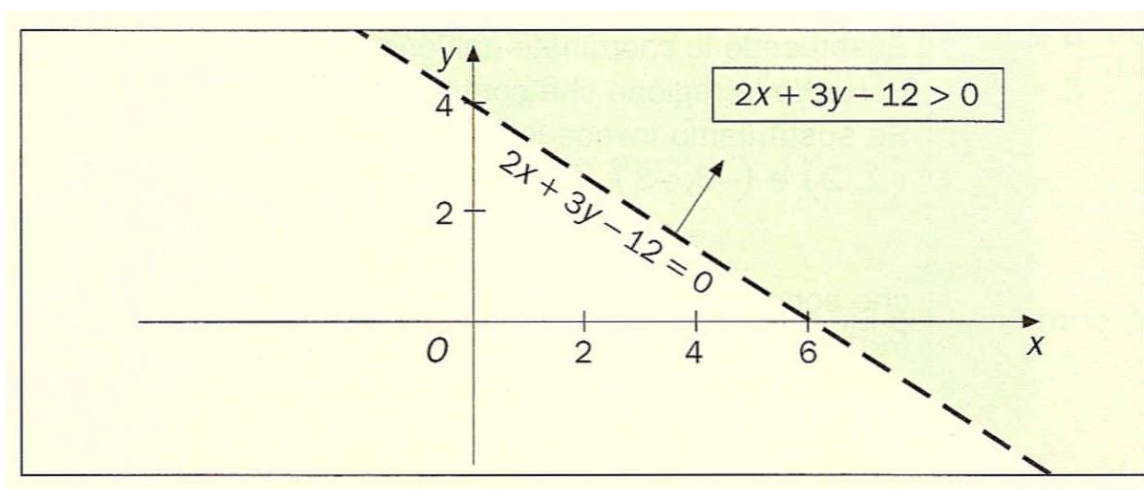
Esiste un metodo rapido per decidere quale dei due semipiani soddisfa la disequazione:

$$ax + by + c \geq 0$$

Dopo aver tracciato la retta di equazione $ax + by + c = 0$, si sostituiscono le coordinate di un punto di un semipiano nel primo membro della disequazione; se per le coordinate di quel punto il primo membro risulta maggiore di zero, lo stesso risulta per tutti i punti del semipiano al quale il punto esaminato appartiene.

Se la retta non passa per l'origine è consigliabile usare l'origine $O(0, 0)$ per la verifica; se, invece, la retta passa per l'origine si sceglie un punto appartenente agli assi.

4 Data la disequazione: $2x + 3y - 12 > 0$, si rappresenta la retta $2x + 3y - 12 = 0$; si sostituiscono nella disequazione le coordinate $(0, 0)$ del punto O ; risulta: $-12 > 0$ che è una disuguaglianza falsa. Allora il punto O , e il semipiano al quale O appartiene, non soddisfano la disequazione. La soluzione della disequazione è data dalle coppie (x, y) del semi piano non contenente il punto O .



Con il metodo indicato si risolvono anche le disequazioni in due variabili non lineari. Precisamente, dopo aver scritto la disequazione nella forma $j(x, y) \geq 0$, si traccia il grafico della funzione $j(x, y) = 0$ e si ricercano le regioni del piano che soddisfano la disequazione determinando il segno della funzione in punti arbitrariamente scelti.

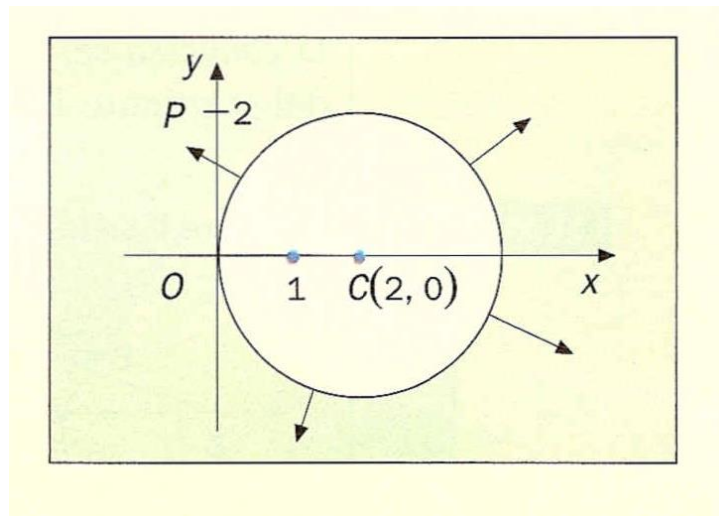
5 Risolvere la disequazione:

$$x^2 + y^2 - 4x \geq 0$$

L'equazione

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

è l'equazione di una circonferenza di centro $C(2, 0)$ e raggio 2 il cui grafico è:



La circonferenza divide il piano in due regioni: una interna, l'altra esterna alla circonferenza.

Per risolvere la disequazione sostituiamo nel primo membro della disequazione le coordinate di un punto interno alla circonferenza, ad esempio, del centro e ricaviamo la disequaglianza $-4 \geq 0$, che è evidentemente falsa.

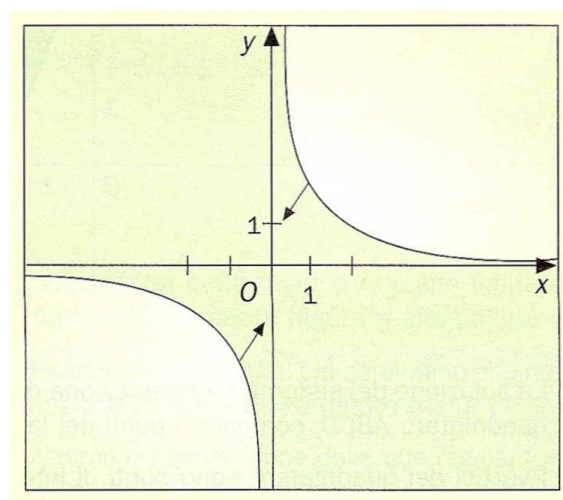
Se, invece, sostituiamo le coordinate di un punto esterno alla circonferenza, ad esempio, del punto $p(0, 2)$ si ricava la disequaglianza $4 \geq 0$, che è vera.

Pertanto la soluzione della disequazione data è costituita da tutti i punti del piano esterni alla circonferenza, compresi i punti della circonferenza stessa.

6 Risolvere la disequazione:

$$xy - 2 \leq 0$$

L'equazione $xy = 2$ è l'equazione di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti il cui grafico è:



I rami dell'iperbole dividono il piano in tre regioni.

Sostituendo le coordinate dell'origine nel primo membro della disequazione otteniamo: $-2 \leq 0$. Pertanto la regione che contiene l'origine soddisfa la disequazione.

Se sostituiamo invece le coordinate di due punti appartenenti alle altre regioni, ad esempio (2,2) e (-3, -3), si ottiene, rispettivamente:

$$4-2 \leq 0 \quad 9-2 \leq 0$$

che sono false.

Pertanto la soluzione della disequazione è costituita da tutti i punti del piano compresi fra i due rami dell'iperbole (regione colorata in figura) e i punti dell'iperbole stessa.

Sistemi di disequazioni in due variabili

Un sistema di disequazioni in due variabili ha come soluzione le coppie (x, y) che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni del sistema.

Si risolvono separatamente tutte le disequazioni del sistema e la soluzione del sistema è costituita dall'intersezione delle regioni di piano che soddisfano le singole disequazioni.

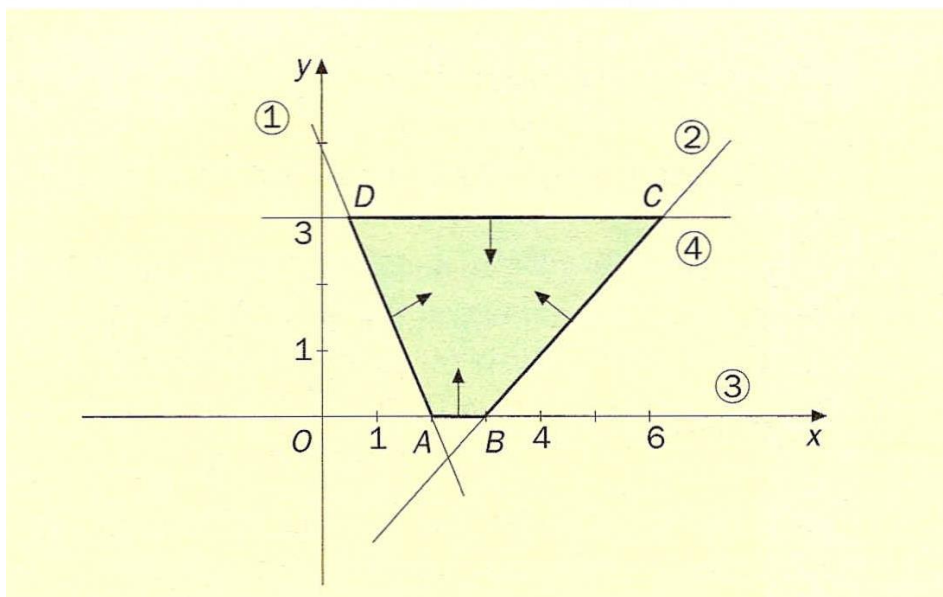
Se il sistema è formato da disequazioni lineari la soluzione, se non è vuota, è data dalla intersezione dei semipiani, soluzioni delle singole disequazioni. Questa intersezione è costituita da un poligono convesso o da una regione illimitata convessa avente per contorno una spezzata aperta, oppure può ridursi a un segmento o a un punto.

Ricordiamo che, come è noto, un poligono, o in generale una figura piana, è detta convessa se, qualunque siano i punti P e Q appartenenti alla figura, ogni punto del segmento PQ appartiene alla figura.

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x - y \leq 3 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

Si determinano i semipiani che sono soluzione di ciascuna disequazione e si rappresentano nel grafico.



La soluzione del sistema è l'intersezione dei quattro semipiani e risulta costituita dai punti del quadrilatero ABCO, compresi i punti dei lati.

I vertici del quadrilatero sono punti di intersezione di rette e si ricavano risolvendo i sistemi di equazioni ottenuti associando a due a due le equazioni delle rette, precisamente:

$$A \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad B \begin{cases} x - y = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad C \begin{cases} x - y = 3 \\ y = 3 \end{cases} \quad D \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Quindi le coordinate dei vertici del quadrilatero sono:

$$A(2,0) \quad B(3,0) \quad C(6,3) \quad D\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

Pertanto la soluzione del sistema di disequazioni è costituita dai punti interni e dai punti dei lati del quadrilatero ABCD.