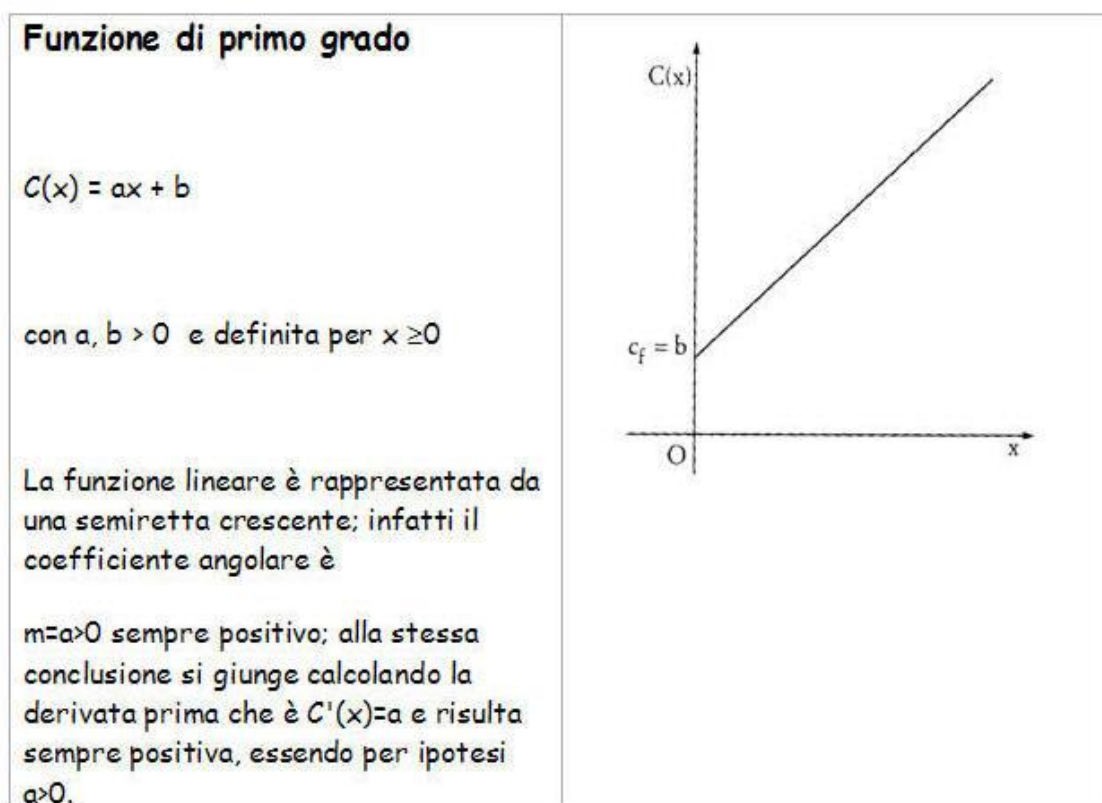


Funzioni costi di produzione

Quando un'impresa produce un bene, sostiene vari tipi di costi che possono essere classificati in fissi e variabili. Si dicono costi fissi i costi che non variano al variare della quantità prodotta; per esempio il costo di un macchinario, l'affitto dei locali di produzione, eccetera. Si dicono costi variabili i costi che variano al variare delle quantità prodotte x e in particolare aumentano al crescere della quantità prodotta; per esempio il costo delle materie prime, i costi per i consumi di energia, eccetera. Si dice costo totale relativo alla produzione di una certa quantità x di un bene la somma dei costi fissi e dei costi variabili necessari per produrre quella quantità x di bene.

Il costo totale è quindi una funzione crescente della quantità x di bene prodotto, perché i costi variabili aumentano all'aumentare della produzione. Indicando con C_f i costi fissi, con $C_v(x)$ i costi variabili e con $C(x)$ il costo totale, possiamo scrivere $C(x) = C_f + C_v(x)$ con $x > 0$.

Risulta $C'(x) > 0$ (derivata di $C(x)$) per ogni $x > 0$, in quanto funzione crescente. La rappresentazione grafica della funzione costo totale nel piano cartesiano si ottiene indicando sull'asse delle ascisse la quantità x di bene prodotto e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori di $C(x)$. Le funzioni costo totale più spesso utilizzate sono le seguenti:



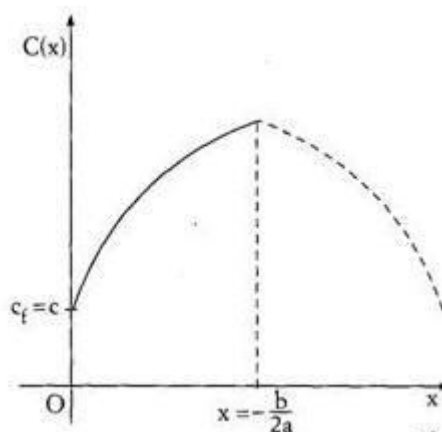
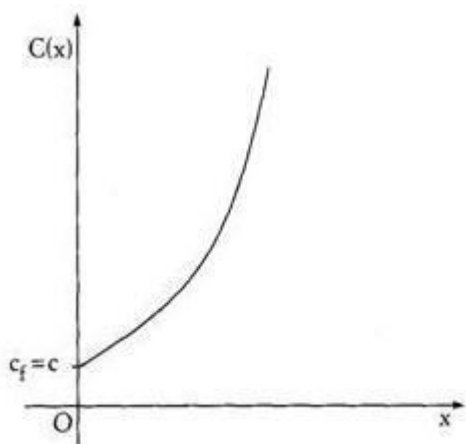
Funzione di secondo grado:

$$C(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a > 0$ e $b, c \geq 0$ definita per $x > 0$

oppure con $a < 0$ e $b, c > 0$ definita per $0 \leq x \leq -b/2a$

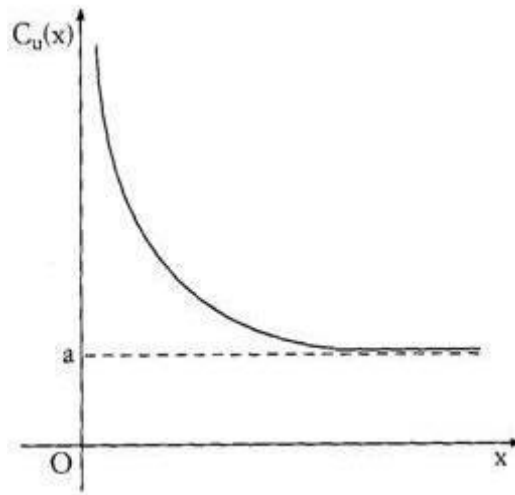
La funzione di secondo grado è rappresentata, nel primo caso, da una parabola crescente con la concavità rivolta verso l'alto, in quanto $a > 0$, mentre nel secondo caso è rappresentata da un arco di parabola crescente con la concavità rivolta verso il basso, in quanto $a < 0$; alla stessa conclusione sull'andamento crescente della funzione si giunge calcolando la derivata prima che è $C'(x) = 2ax + b$ e che risulta sempre positiva, se per ipotesi $a > 0$ e $b \geq 0$ (funzione crescente) e che risulta positiva per $x \leq -b/2a$, se $a < 0$ e $b > 0$ (funzione crescente); inoltre la derivata seconda è $C''(x) = 2a$ e risulta $2a$ sempre positiva se $a > 0$ (concavità rivolta verso l'alto), mentre sempre negativa se $a < 0$ (concavità rivolta verso il basso).



Si dice costo medio o unitario della produzione di una quantità x di un bene il rapporto fra il costo totale sostenuto e la quantità prodotta x
 $C_u(x) = C(x) / x$ con $x > 0$.

Esso indica, in media, il costo di ogni unità prodotta. Se la funzione costo totale è lineare, la funzione costo unitario è la seguente:
 $C_u(x) = (ax + b) / x = a + b/x$ con $x > 0$

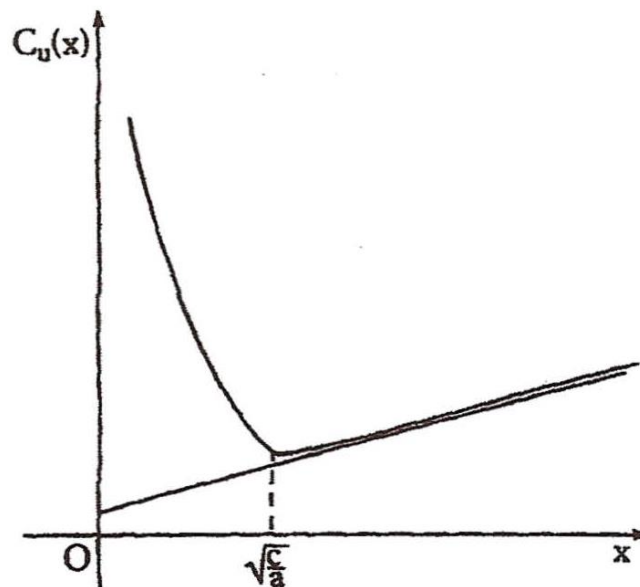
e la sua rappresentazione grafica è un ramo di iperbole equilatera decrescente, di asintoti $x=0$ e $y=a$.



Se la funzione costo totale è di secondo grado, la funzione costo unitario è la seguente

$$C_u(x) = (ax^2 + bx + c) / x = ax + b + c/x$$

e la sua rappresentazione grafica è un ramo di un'iperbole non equilatera di asintoti $x = 0$ e $y = ax + b$.



In questo caso, il costo unitario è rappresentato da una funzione prima decrescente poi crescente, quindi la funzione presenta un punto di minimo; infatti la derivata prima è $C'(x) = a - c/x^2$ e, posto $C'(x) = 0$, si ha l'equazione $a - c/x^2 = 0$ che ammette le soluzioni $x = \pm\sqrt{c/a}$; trascurando la soluzione negativa priva di significato economico, risulta $C'(x) > 0$ per $x > \sqrt{c/a}$ e $C'(x) < 0$ per $x < \sqrt{c/a}$ è l'ascissa del punto di minimo della funzione costo unitario. La relativa ordinata, che si ottiene sostituendo tale ascissa nella funzione, è

$$Cu(\sqrt{c/a}) = ax + b + c/x = 2\sqrt{c/a} + b$$

L'interpretazione economica dei valori trovati è la seguente: producendo la quantità $x = \sqrt{c/a}$ di bene, si realizza il minimo costo unitario, pari a

$$Cu(\sqrt{c/a}) = 2\sqrt{ac}$$

Questo punto di minimo della funzione costo unitario viene chiamato punto di fuga, in quanto se il prezzo di vendita unitario risultasse inferiore al costo minimo unitario, l'impresa sarebbe in perdita e quindi dovrebbe ritirarsi dal mercato.

Si dimostra che le curve dei costi unitari, a eccezione della curva lineare, presentano sempre un punto di minimo.

Se $C(x)$ è la funzione costo totale relativo alla produzione di un certo bene, indicati con $C(x)$ e $C(x+1)$ i costi totali sostenuti per produrre rispettivamente le quantità x e $(x+1)$, si può dare la seguente definizione:

Si dice costo marginale unitario il rapporto

$$Cmu = C(x + 1) - C(x) / (x + 1 - x) = C(x + 1) - C(x)$$

Questo è il costo che si deve sostenere per portare la produzione da x a $(x + 1)$ unità. Il costo marginale unitario si può interpretare anche come rapporto incrementale fra l'incremento di costo e l'incremento di una unità della quantità prodotta. Analizzando il costo marginale unitario in relazione ai diversi tipi di funzione costo totale, si hanno i seguenti casi:

1) se la funzione costo totale è lineare, risulta

$$C(x + 1) = a(x + 1) + b \text{ e } C(x) = ax + b, \text{ quindi}$$

$$C_{mu} = C(x + 1) - C(x) = a(x + 1) + b - ax - b = a$$

Dove a è costante.

2) se la funzione costo totale è di 2° grado, risulta

$$C(x + 1) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c \quad C(x) = ax^2 + bx + c$$

$$C_{mu} = C(x + 1) - C(x) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + a + b$$

Se la funzione costo totale è derivabile, si può considerare il costo marginale per una quantità infinitesimale, cioè per una quantità di $h \rightarrow 0$. Si ha quindi:

$$C_m = \lim_{h \rightarrow 0} (C(x+h) - C(x)) / h$$

Che corrisponde alla derivata della funzione costo totale.

Se la funzione costo totale è derivabile, il costo marginale è quindi la derivata prima della funzione costo totale rispetto alla quantità x prodotta

$$C_m = dC(x) / dx = C'(x)$$

Le curve che rappresentano il costo unitario e il costo marginale si incontrano nel punto di minimo della funzione costo unitario, ossia nel punto in cui è nulla la derivata prima rispetto a x di tale funzione.

Infatti la funzione costo unitario è $C_u(x) = C(x) / x$ e ha derivata prima

$$C'_u(x) = (x C'(x) - C(x)) / x^2$$

La derivata prima è nulla per $x C'(x) - C(x) = 0$. Ne consegue $C'(x) = C(x) / x$ e questa è proprio l'equazione che si ottiene uguagliando la funzione costo marginale e la funzione costo unitario:

$$\begin{cases} C_u(x) = C(x) / x \\ C_m = C'(x) \end{cases}$$

Studiando il segno di $C'u(x)$ si possono fare le seguenti considerazioni:

- per $C'u(x) < 0$ $C'(x) < C(x) / x$, quindi il costo unitario è una funzione decrescente poiché la funzione costo marginale è minore della funzione costo unitario ($C_m < C_u$);
- per $C'u(x) > 0$ $C'(x) > C(x) / x$ quindi il costo unitario è una funzione crescente poiché la funzione costo marginale è maggiore della funzione costo unitario ($C_m > C_u$);

queste indicazioni confermano la rappresentazione grafica della figura

