I Problemi particolari di P.L.: problemi di assegnazione

I problemi di assegnazione studiano l'attribuzione di n risorse ad n destinazioni in modo che ogni risorsa venga assegnata ad una e una sola destinazione.

Ad esempio, sono problemi di assegnazione:

- la distribuzione di n lavori ad n ditte, in modo che a ogni ditta ne sia assegnato uno e uno solo;

- l'assegnazione di n operai (o squadre di operai) ad n lavori, in modo che ogni lavoro sia assegnato uno ed un solo operaio (o squadra);

- l'assegnazione di n equipaggi a n voli;

- l'assegnazione di n autisti a n autocarri.

Un classico problema di assegnazione è quello che devono risolvere le compagnie di navigazione aerea per assegnare gli equipaggi agli aerei in modo da ridurre minimo i tempi trascorsi a terra lontano dalle basi.

I problemi di assegnazione sono casi particolari dei problemi di trasporto, quando il numero delle origini è eguale al numero delle destinazioni (m = n), le quantità disponibili e richieste sono tutte eguali a uno e le quantità assegnate sono zero o uno.

Nota la matrice dei costi (o dei tempi impiegati), detta matrice dell'efficienza, si de' determinare l'assegnazione che comporti il minimo costo totale o il minimo tempo totale.

Indicando con Ai le risorse, con Bk le destinazioni e con cik i costi (o i tempi). ha la seguente matrice dell'efficienza:

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	C_{11}	C_{21}	...	C_{1n}
A_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}
...	...	...	...	...
A_n	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nn}

Le assegnazioni possibili sono n!, quindi, eccetto che per n piccolo, difficilmente si potrebbero elencare tutte e poi scegliere l'ottima (o le ottime).

Il problema di assegnazione può essere tradotto in un problema di programmazione lineare, però sono stati trovati metodi più semplici e più efficienti.

Il metodo di risoluzione del problema, detto **"metodo ungherese"**, si basa sul seguente teorema:

Se nella matrice dell'efficienza si sottrae uno stesso numero da tutti gli elementi di una riga o di una colonna, l'assegnazione ottima per la prima matrice è pure ottima per la seconda.

Il metodo si articola nelle seguenti successive fasi:

a) Si sottrae dagli elementi di ogni riga e, successivamente, dagli elementi di ogni colonna l'elemento minore, in modo che vi sia almeno uno zero per ogni riga e per ogni colonna.

b) Si cerca fra gli zeri una assegnazione ottima.

A tale scopo si può seguire questo procedimento:

- si contrassegna con un cerchietto uno zero per ogni riga (o per ogni colonna) a partire da quelle con minor numero di zeri;

- si sbarrano gli altri zeri che appartengono sia alla stessa riga, sia alla stessa colonna dello zero contrassegnato.

Se gli zeri contrassegnati sono uno per riga e uno per colonna, questa è una soluzione ottima e il costo è dato dalla somma di tutti i numeri che si erano sottratti.

Il problema può ammettere più di una soluzione ottima, tutte con lo stesso costo.

Esempio Un Comune deve assegnare quattro lavori A_1, A_2, A_3, A_4 a quattro imprese B_1, B_2, B_3, B_4 in modo che ad ogni impresa sia assegnato uno e un solo lavoro.

I costi (in unità convenzionali) sono espressi dalla seguente matrice dell'efficienza:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	5	6	4
A_2	2	3	6	2
A_3	3	4	2	5
A_4	3	2	4	2

Determinare l'assegnazione di minimo costo complessivo. Le possibili assegnazioni sono 4!

Si trasforma la matrice mediante successive sottrazioni per far comparire uno zero in ogni riga e in ogni colonna. Si perviene alla matrice:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	2	3	1
A_2	0	1	4	0
A_3	1	2	0	3
A_4	1	0	2	0

Si contrassegna uno zero per riga (o per colonna) iniziando dalle linee con minor numero di zeri, e si sbarrano gli altri zeri della stessa riga e della stessa colonna.

Si ricava immediatamente l'assegnazione ottima:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	2	3	1
A_2	Ø	1	4	0
A_3	1	2	0	3
A_4	1	0	2	Ø

L'assegnazione ottima risulta: A_1B_1, A_2B_4, A_3B_3, A_4B_2 con un costo z = 9 (ottenuto sommando i costi nelle caselle assegnate).

Se non si è ottenuta l'assegnazione ottima si procede con il metodo.

c) Si traccia il minor numero di linee in modo da ricoprire tutti gli zeri (tali linee devono essere in numero minore di n se non si è ottenuta un'assegnazione ottima).

A questo scopo si usa il seguente procedimento:

- si segnano con una crocetta le righe senza zeri contrassegnati;

- si segnano, successivamente, le colonne che, nelle righe segnate, hanno uno più zeri sbarrati;

- si segnano con una crocetta le righe che hanno, nelle colonne segnate, zeri contrassegnati; e così di seguito;

- le linee cercate si ottengono tracciando una linea su tutte le righe non segnate e su tutte le colonne segnate.

d) Dagli elementi della matrice non coperti da linee si sottrae il minore di essi e lo si aggiunge ai termini che sono nell'incrocio fra due linee.

e) Nella matrice trasformata si cerca una soluzione ottima fra gli zeri; in caso negativo si ripete il procedimento dalla fase c).

Esempio Sia data la seguente matrice dell'efficienza:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	3	7	5	6
A_2	4	5	2	4	2
A_3	6	5	7	8	8
A_4	4	3	6	6	7
A_5	2	4	2	3	5

Determinare la soluzione ottima.

Trasformiamo la matrice facendo comparire gli zeri e cerchiamo la soluzione ottima (figura a)

Fig. a

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	0	4	1	3
A_2	2	3	Ø	1	0
A_3	1	Ø	2	2	3
A_4	1	Ø	3	2	4
A_5	0	2	Ø	Ø	3

Fig. b

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	0	4	1	3
A_2	2	3	0	1	0
A_3	1	0	2	2	3
A_4	1	0	3	2	4
A_5	0	2	0	0	3

Non si è trovata la soluzione fra gli zeri. Si procede allora con le fasi c), d), e), ossia si cerca di coprire gli zeri con il minor numero di linee (figura b). L'elemento minore è 1; lo si sottrae da tutti i termini non coperti da linee e lo si aggiunge ai termini posti agli incroci. Si ottiene la matrice nella quale si cerca fra gli zeri la soluzione ottima, secondo la fase b).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	Ø	3	0	2
A_2	2	4	Ø	1	0
A_3	Ø	0	1	1	2
A_4	0	Ø	2	1	3
A_5	Ø	3	0	Ø	3

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	Ø	3	0	2
A_2	2	4	Ø	1	0
A_3	0	Ø	1	1	2
A_4	Ø	0	2	1	3
A_5	Ø	3	0	Ø	3

Si hanno due soluzioni ottime, rispettivamente le assegnazioni:

A_1B_4, A_2B_5, A_3B_2, A_4B_1, A_5B_3; **$z = 18$**

A_1B_4, A_2B_5, A_3B_1, A_4B_2, A_5B_3; **$z = 18$**