

FUNZIONI

Il concetto di funzione è, si può dire, il concetto più importante per la matematica.

Si definisce funzione y della variabile x un legame fra due variabili, una detta variabile indipendente x e l'altra detta variabile dipendente y tali che abbiano senso le operazioni da effettuare sulla x per ottenere i valori della y e per ogni valore della x corrisponda un solo valore della y $y=f(x)$

Studio di funzione

- Studio intuitivo di funzione
- Studio completo di funzione

Campo di esistenza

per il campo di esistenza dobbiamo considerare tre casi:

- funzione fratta:
devo porre il denominatore diverso da zero

Il campo di esistenza per le funzioni fratte

Si definisce funzione fratta una funzione in cui la x compaia al denominatore

Consideriamo una funzione fratta:

$$y=(x+1)/(x-2)$$

Ricordando che in matematica non è ammessa la divisione per zero avremo che il denominatore non potrà mai diventare uguale a zero altrimenti la frazione non avrebbe nessun significato ne segue che potremo attribuire ad x tutti i valori meno quelli che annullano il denominatore cioè

$$(x-2) \neq 0$$

quindi il campo di esistenza sarà dato da

$$x \neq 2$$

cioè

C.E. = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$ Il campo di esistenza è l'insieme degli x appartenenti ad $\mathbb{R}$ tali che x è diverso da 2

oppure in altra notazione

C.E. = $(-\infty, 2[\cup]2, +\infty)$ Il campo di esistenza è l'insieme di tutti i punti della retta reale escluso il punto 2

- funzione con radicale ad indice pari:
il termine sotto radice deve essere maggiore o uguale a zero

Campo di esistenza per funzioni irrazionali

Si definisce funzione irrazionale una funzione in cui la x compaia sotto il segno di radice

Consideriamo una funzione irrazionale

$$y = \sqrt{x-3}$$

Poiché la radice è definita solo per valori non negativi del radicando, il termine sotto radice dovrà essere maggiore od uguale a zero

$$(x-3) \geq 0$$

segue

$$x \geq 3$$

quindi il campo di esistenza sarà

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$$

Il campo di esistenza è l'insieme degli x appartenenti ad $\mathbb{R}$ tali che x è maggiore od uguale a 3

oppure in altra notazione

$$C.E. = [3, +\infty)$$

Il campo di esistenza è l'insieme di tutti i punti della retta reale maggiori o uguali a 3

- funzione logaritmica:
l'argomento del logaritmo deve essere maggiore di zero

Campo di esistenza per funzioni logaritmiche

Una funzione si definisce logaritmica se la x compare nell'argomento del logaritmo

Consideriamo una funzione logaritmica

$$y = \log(x+4)$$

Poiché il logaritmo è definito solo per valori positivi dell'argomento, il termine dentro parentesi dovrà essere maggiore di zero

$$(x+4) > 0$$

segue

$$x > -4$$

quindi il campo di esistenza sarà

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$$

Il campo di esistenza è l'insieme degli x appartenenti ad $\mathbb{R}$ tali che x è maggiore di -4

oppure in altra notazione

$$C.E. =]-4, +\infty)$$

Il campo di esistenza è l'insieme di tutti i punti della retta reale maggiori di -4

Altrimenti, al di fuori di questi casi, il campo di esistenza e' tutto l'asse reale

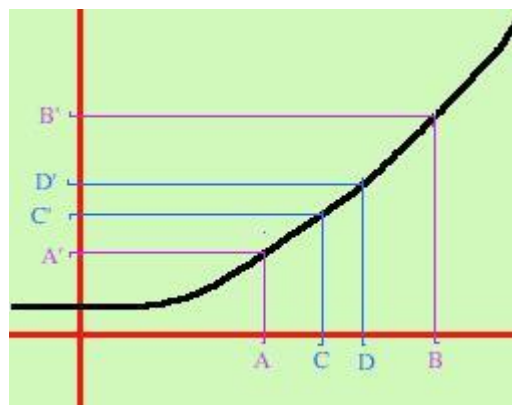
Inizia a stampare da qui I limiti

Se la funzione e' il concetto di base per la matematica il limite e' il concetto di base per le funzioni: infatti e' il limite che ci permette di superare i paradossi dovuti all'insufficienza del concetto di punto perché ci permette di utilizzare il concetto di intervallo.

Teoricamente il limite e' una cosa molto semplice: se io considero un piccolo intervallo sull'asse delle x ad esso corrisponderà un intervallo più o meno piccolo sull'asse delle y ; se quando restringo l'intervallo sull'asse delle x mi si restringe anche l'intervallo corrispondente sull'asse delle y allora ho un limite.

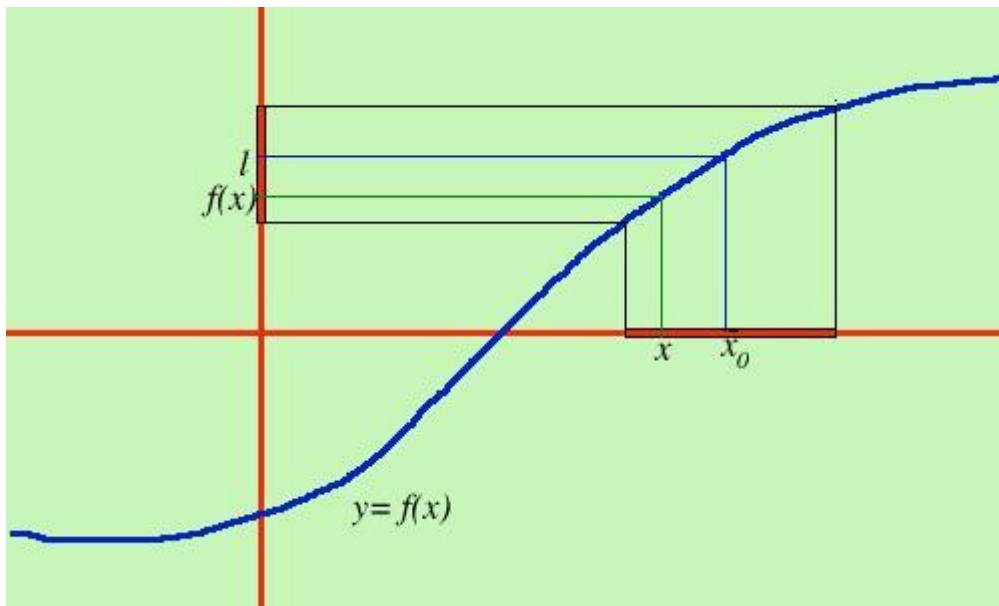
In figura all'intervallo in viola AB corrisponde l'intervallo in viola $A'B'$ ed all'intervallo più piccolo in blu CD corrisponde un intervallo più piccolo in blu $C'D'$; allora posso avvicinarmi ad un punto quanto voglio: basta rendere sempre più piccolo l'intervallo sulle x . Poiché l'intervallo posso renderlo piccolo quanto voglio allora posso sostituirlo al concetto di punto.

Il problema e' tradurre un concetto così semplice in linguaggio matematico.



Limite finito di una funzione in un punto

Per prima cosa, siccome si parla di limite di una funzione e la funzione e' come variano i punti sull'asse y partiremo da un intervallo sull'asse y e diremo che allo stringersi di un intervallo sulle y avvicinandosi ad un valore l si stringe anche l'intervallo corrispondente sulle x avvicinandosi ad x_0



Per dire questo consideriamo sull'intervallo delle x (quello marcato piu' scuro) un qualunque punto x a cui corrisponde $f(x)$ sull'asse Y . Per rendere piccoli gli intervalli bastera' dire che deve essere piccola la distanza tra $f(x)$ ed l e contemporaneamente la distanza tra x ed x_0 ; ora la distanza si ottiene facendo la differenza fra le coordinate, ma essendo sempre positiva, dovra' essere presa in modulo. Quindi bastera' dire che quando la distanza sulle Y e' minore di un numero piccolissimo anche la distanza sulle X dovra' essere minore di un numero piccolissimo, od in modo equivalente quando $f(x)$ si avvicina ad l anche x si avvicina ad x_0 .

Ora siamo pronti a dare la definizione matematica:

Si dice che la funzione $y=f(x)$ ammette limite finito l per x tendente ad x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se per ogni numero positivo ϵ (epsilon) piccolo a piacere esiste un numero δ (delta epsilon) cioe' delta dipendente da epsilon) tale che da

$$|x - x_0| < \delta \text{ segue } |f(x) - l| < \epsilon$$

$|x - x_0| < \delta$ e' un intervallo **A** sull'asse x , intorno completo del punto x_0

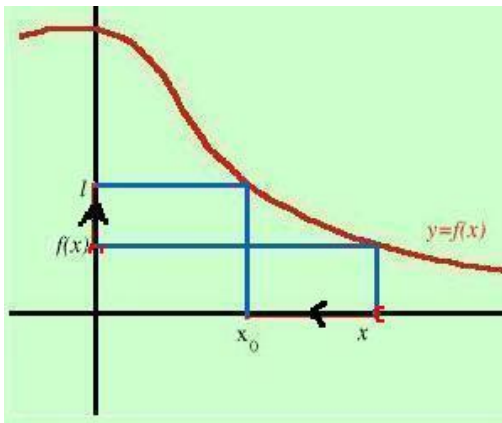
$|f(x) - l| < \epsilon$ e' un intervallo **B** sull'asse y

quindi si puo' anche dire che quando la x appartiene ad **A** allora $f(x)$ appartiene ad **B**

od anche: quando x si avvicina ad x_0 allora $f(x)$ si avvicina ad l

Limite destro e limite sinistro

Per capire bene il concetto di limite destro (sinistro) consideriamo cos'e' un intervallo per un punto interno: e' un intorno e per essere un intorno non e' necessario che il punto sia al centro dell'intervallo, anzi il punto puo' essere spostato anche fino al bordo se l'intervallo e' chiuso ed in tal caso avremo un intorno destro o sinistro del punto.



Ora quando considero il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ invece di considerare tutto un intervallo che contenga x_0 possiamo considerarne un intorno destro (sinistro) ed in tal caso sull'asse y corrispondera' un intorno destro o sinistro di l ma cio' non cambiera' nulla: infatti allo stringersi dell'intervallo sull'asse delle y corrispondera' lo stringersi dell'intorno sull'asse delle x. Cioe' quando $f(x)$ si avvicina ad l / x si avvicina ad x_0

Definizione matematica:

Si dice che la funzione $y=f(x)$ ammette limite finito destro l per x tendente ad x_0^+ e si scrive: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ se esiste un numero positivo ϵ (epsilon) piccolo a piacere tale che da $|f(x) - l| < \epsilon$ segue $x - x_0 < \delta$ (delta epsilon cioe' delta dipendente da epsilon)

Note: x tendente ad x_0^+ significa che mi avvicino ad x da destra, cioe' dalla parte dei valori positivi

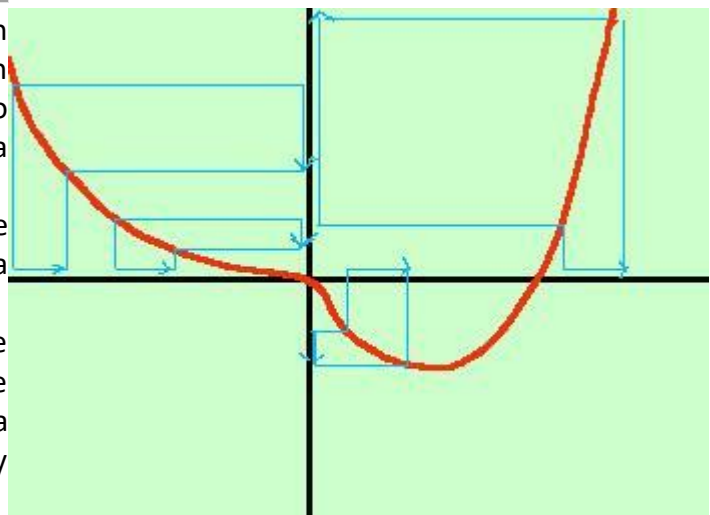
Perche' le derivate

Il concetto di limite, sebbene utilissimo per sostituire ad un punto un intervallo ha comunque dei difetti: infatti applicando il concetto di limite ad un punto io posso avere solamente una visione locale di una funzione: e' come se volessi studiare una strada di notte approfittando della luce di qualche lampione: potro' vedere in quel punto e nelle vicinanze di quel punto ma se voglio sapere cosa succede un po' piu' in la' dovro' avere un altro lampione. A noi serve qualcosa che ci permetta di vedere la funzione nella sua interezza e quel qualcosa sara' la derivata;

Immaginate di avere una funzione ed un punto sull'asse delle x cui corrisponde un punto sull'asse y ; se pensiamo che il punto sull'asse x si sposti con regolarita' cosa vedro' sull'asse y ?

Vedro' che il punto sull'asse y va piu' veloce o meno veloce a seconda della pendenza della funzione:

se osservi la figura a fianco vedi che a frecce uguali sull'asse x corrispondono frecce diverse sull'asse y e questo e' dovuto alla velocita' con cui si aggregano i punti sulla y rispetto ai punti sulla x .



Prima la funzione (il punto sull'asse y corrispondente alla x) scende rapidamente poi man mano rallenta di velocita' fino a fermarsi dove c'e' il minimo e quindi cambia direzione e prende velocita' salendo verso l'alto.

Se ora noi riusciamo ad esprimere come varia di velocita' il punto sulla y al variare di x in modo regolare avremo un qualcosa che ci permettera' di vedere la funzione tutta intera e non solo una piccola parte come nel caso del limite. Ora si tratta di esprimere matematicamente questo

concetto:

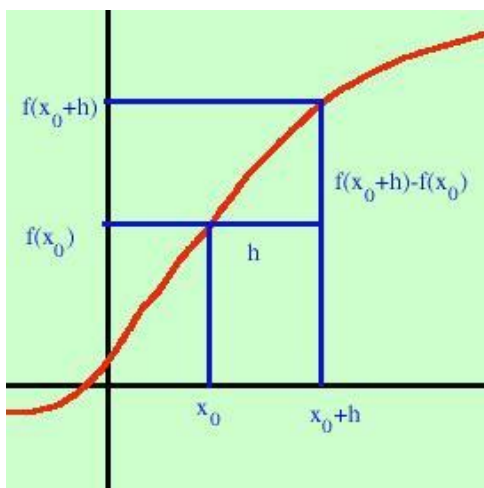
Come varia il punto sull'asse y quando il punto sull'asse x si sposta regolarmente?

Definizione di derivata

Dobbiamo vedere come varia la y quando la x varia in modo regolare: intuitivamente il sistema piu' semplice e' quello di considerare un intervallo sulla y ed il corrispondente intervallo sulle x e farne il rapporto: questo mi dara' la variazione media. Se voglio la variazione in un punto dovrò restringere gli intervalli fino a quel punto.

Matematicamente:

considero sull'asse x i punti x_0 e x_0+h , in loro corrispondenza avro' i punti $f(x_0)$ ed $f(x_0+h)$ sull'asse y. La distanza tra $f(x_0)$ ed $f(x_0+h)$ sull'asse y (in verticale) sara' $f(x_0+h) - f(x_0)$ mentre la distanza tra x ed x_0 sull'asse x sara' $x_0+h - x_0=h$.



Chiamiamo rapporto incrementale il rapporto tra la distanza sull'asse y e la distanza sull'asse x:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{rapporto incrementale}$$

Ora per ottenere la derivata nel punto x_0 bastera' far stringere l'intervallo facendo diminuire h

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Definizione: si definisce derivata di una funzione in un punto il limite (se esiste ed e' finito) del rapporto incrementale al tendere a zero dell' incremento h

Per avere la derivata generica bastera' considerare il punto come x, cioe' non fisso ma generico sull'asse delle x

Esempi di calcolo di qualche semplice derivata

Per iniziare proviamo a calcolare la derivata di $y = x^2$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+h) = (x+h)^2$$

faccio il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

sviluppo il quadrato

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2hx + h^2) / h =$$

Per il teorema sulla somma dei limiti

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2hx / h + \lim_{h \rightarrow 0} h^2 / h =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + \lim_{h \rightarrow 0} h = 2x$$

Quindi la derivata di $y = x^2$ e' $y' = 2x$

Tabella delle principali derivate utilizzate nelle scuole medie superiori

Funzione	Derivata
$y = \text{costante}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n x^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = 1 / 2\sqrt{x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$

$y = a^x$	$y' = a^x \log a$
$y = \log x$	$y' = 1/x$
$y = \log_a x$	$y' = 1 / (x \log a) = (\log_a e) / x$

Derivata di una somma o differenza di funzioni

E' la regola piu' facile ed intuitiva: per fare la derivata di una somma (o differenza) di funzioni basta fare la derivata delle singole funzioni ed il segno non cambia

esempio: Facciamo la derivata di

$$y = x^4 + x^3 - x^2 - x$$

La derivata di x^4 e' $4x^3$

La derivata di x^3 e' $3x^2$

La derivata di x^2 e' $2x$

La derivata di x e' 1

quindi

$$y' = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$