

La Programmazione Lineare

Fra i problemi di [Ricerca Operativa](#), hanno assunto particolare importanza quelli di *Programmazione Lineare*.

Si è in presenza di un programma lineare (oppure, il problema di [Ricerca Operativa](#) considerato è di Programmazione Lineare) quando il problema si traduce in un modello matematico costituito da:

- una funzione obiettivo lineare in n variabili (le variabili hanno tutte esponente pari a uno), che normalmente esprime un costo (da minimizzare) oppure un ricavo o un guadagno (da massimizzare);
- un sistema di vincoli espressi da equazioni o disequazioni, lineari nelle n variabili (cioè di primo grado): sono detti anche *vincoli tecnologici*;
- un sistema di vincoli di segno, che esprimono la non-negatività delle variabili, trattandosi di grandezze economiche.

Dal punto di vista matematico, si parla allora di problemi per la ricerca di massimi o minimi vincolati.

Nel caso in cui le variabili di decisione sono due (x e y , per esempio), si può risolvere un problema di questo tipo con il **metodo grafico**, i cui aspetti fondamentali sono descritti qui di seguito.

I vincoli di segno limitano la ricerca delle soluzioni al primo quadrante del corrispondente piano cartesiano.

Dopo aver tracciato tutte le rette associate alle disequazioni ed equazioni del sistema dei vincoli, se l'intersezione derivante non è un insieme vuoto, si otterrà un poligono (o una regione illimitata) detto **regione ammissibile**, perché contiene tutte le coppie (x ; y) che soddisfano le disequazioni e/o le equazioni del sistema. Ciascuna di queste coppie è detta **soluzione ammissibile**, mentre le coppie di valori che corrispondono ai vertici del poligono sono dette **soluzioni ammissibili di base**: fra esse va cercata, se esiste, la soluzione ottima del problema.

In corrispondenza di ogni vertice del poligono, infatti, si calcola il valore della funzione obiettivo, e si sceglie la coppia che rende ottima (cioè massima o minima, a seconda dei casi) la funzione stessa (è questa la conseguenza diretta del **teorema fondamentale della programmazione lineare**: *il massimo ed il minimo di una funzione lineare di un numero qualsiasi di variabili soggetta a vincoli espressi da equazioni e/o da disequazioni lineari, se esistono, si trovano sui vertici della regione ammissibile, e non al suo interno*). Nel caso particolare in cui in corrispondenza di due vertici consecutivi si ottiene lo stesso valore della funzione obiettivo, la teoria della programmazione lineare dimostra che lo stesso valore si ottiene in corrispondenza di un qualsiasi punto compreso tra i due vertici suddetti.

Se i valori delle variabili x e y devono essere numeri interi (esempio: numero di pezzi prodotti alla settimana), si considerano nella regione ammissibile solo i punti aventi per coordinate numeri interi.

Vediamo ora un esempio, e la sua soluzione passo dopo passo:

Una falegnameria produce mobili usando legno di pino, di noce e di mogano; del primo ha una disponibilità mensile di 4 q, del secondo di 3 q e del terzo di 2 q. I modelli di mobile sono soltanto due: M ed N. Per produrre una unità di M occorrono 2 kg di pino, 4 kg di noce e 1 kg di

mogano; per produrre una unità di N occorrono, invece, 3 kg di pino, 1 kg di noce e 1,5 di mogano.

Se il guadagno unitario per M è di € 300,00, e quello per N è di € 250,00, quanti mobili del tipo M e quanti del tipo N devono essere prodotti per rendere massimo il guadagno complessivo?

Costruiamo, innanzitutto, la matrice tecnica (o tecnologica):

Modelli di mobile	Tipo di legno		
	Pino	Noce	Mogano
M	2 Kg	4 Kg	1 Kg
N	3 Kg	1 Kg	1,5 Kg
Disponibilità mensile	4 q = 400 Kg	3 q = 300 Kg	2 q = 200 Kg

Tale tabella riassume i dati del testo del problema, ordinandoli in modo da poter costruire il sistema dei vincoli.

Scelta delle variabili di decisione:

x = unità da produrre al mese del mobile M;

y = unità da produrre al mese del mobile N.

Costruiamo il sistema dei vincoli:

Vincolo per il legno di pino:

$$2x + 3y \leq 400$$

Vincolo per il legno di noce:

$$4x + 1y \leq 300$$

Vincolo per il legno di mogano:

$$1x + 1,5y \leq 200$$

Il sistema dei vincoli è allora il seguente:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 400 \\ 4x + y \leq 300 \\ x + 1,5y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Costruiamo la funzione obbiettivo:

Guadagno complessivo per il mobile M: $300 \cdot x$ Euro;

Guadagno complessivo per il mobile N: $250 \cdot y$ Euro.

Funzione obiettivo: $z = 300 \cdot x + 250 \cdot y$, da massimizzare.

Scriviamo, ora, il sistema delle equazioni associate alle disequazioni del sistema dei vincoli, esplicitando la variabile y :

$$\begin{cases} 3y = -2x + 400 \\ y = -4x + 300 \\ 1,5y = -x + 200 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} \\ y = -4x + 300 \\ y = -\frac{1}{1,5}x + \frac{200}{1,5} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} \\ y = -4x + 300 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Come si può notare nel terzo passaggio, la prima e la terza equazione del sistema coincidono, quindi esse determineranno la stessa retta nel piano cartesiano. Nella matrice tecnica, infatti i numeri presenti nella colonna del legno di pino sono esattamente doppi dei numeri presenti nella colonna del legno di mogano.

Clicca [qui](#) per visualizzare il file MS Excel con le tabelle di corrispondenza delle rette ed il loro grafico nel piano cartesiano xOy .

Poiché i vincoli tecnologici del sistema presentano tutti il verso $\leq$, la regione ammissibile è il poligono chiuso delimitato dalle due rette e dagli assi cartesiani, nel primo quadrante. I suoi vertici sono i punti O, A, B, C .

Determinazione delle coordinate dei vertici:

Punto O : è l'origine del piano cartesiano, quindi $O(0;0)$;

Punto A : è il punto di intersezione della seconda retta con l'asse x , quindi $A(75;0)$;

Punto C : è il punto di intersezione della prima retta con l'asse y , quindi $B(0; \frac{400}{3})$.

Punto B : è il punto di intersezione tra le due rette oblique. Per trovare le sue coordinate, possiamo risolvere il corrispondente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} \\ y = -4x + 300 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} \\ -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} = -4x + 300 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} \\ -\frac{2}{3}x + 4x = -\frac{400}{3} + 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} \\ \frac{-2x + 12x}{3} = \frac{-400 + 900}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} \\ 10x = 500 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{400}{3} \\ x = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 50 \\ y = 100 \end{cases}$$

Quindi B (50;100),

A questo punto, possiamo calcolare il valore della funzione obiettivo nei quattro vertici della regione ammissibile:

$$z_O = 300 \cdot 0 + 250 \cdot 0 = 0,00 \text{Euro}.$$

$$z_A = 300 \cdot 75 + 250 \cdot 0 = 22500,00 \text{Euro}.$$

$$z_B = 300 \cdot 50 + 250 \cdot 100 = 40000,00 \text{Euro}.$$

$$z_C = 300 \cdot 0 + 250 \cdot 133,33 = 33332,50 \text{Euro}.$$

La soluzione ottima, quindi, in base ai dati del problema, è produrre 50 unità al mese del mobile M e 100 unità al mese del mobile N, ottenendo un guadagno mensile di 40000,00 Euro.