

Problemi di programmazione lineare

La finalità dello studio della ricerca operativa è quella di abituare ad analizzare i problemi economici per tradurli in modelli matematici contribuendo a costruire la capacità di operare scelte razionali, sia a livello individuale, sia a livello di collettività.

La **programmazione lineare** è una parte molto importante della ricerca operativa.

Essa trova numerose applicazioni in tutti i campi, in quanto i problemi sono espressi in forma lineare, quindi abbastanza semplice. La complessità deriva infatti, non dalla formulazione matematica del modello, ma dal numero di variabili e vincoli che in esso compaiono. Le tecniche di risoluzione di problemi di P.L. si sono sviluppate grazie alla diffusione degli strumenti informatici che hanno permesso la risoluzione di problemi con migliaia e migliaia di variabili e vincoli (si pensi che per il posizionamento di una piattaforma petrolifera in mare, il modello era costituito da un sistema di circa 360.000 equazioni!!).

Noi ci limitiamo allo studio di problemi di P.L. con funzioni in due variabili che possono essere facilmente risolti per via grafica. Il metodo grafico permette una visualizzazione dei vincoli sul piano cartesiano e facilita la ricerca del massimo e del minimo. Un metodo generale di risoluzione di un simile problema è quello del simplexso, che è un metodo iterativo, in quanto, partendo da una soluzione del sistema dei vincoli, con successivi passaggi permette di arrivare alla soluzione ottimale e viene applicato con l'uso dell'elaboratore.

Ci si trova di fronte ad un problema di programmazione lineare quando esso si traduce in un modello matematico costituito da:

- una funzione lineare di n variabili (funzione economica) da rendere massima o minima;
- un sistema di vincoli espressi da equazioni, o disequazioni, lineari nelle n variabili;
- un sistema di vincoli di segno che esprimono la non - negatività delle variabili, trattandosi di grandezze economiche.

Tali problemi sono quindi problemi di massimo e minimo vincolati, con funzione e vincoli tutti lineari. I problemi di P.L. sono problemi di scelta economica della migliore distribuzione fra più attività, problemi di trasporto, di assegnazione di risorse, di preparazione di mangimi o diete particolari. Di questa tipologia di problemi viene fornito un esempio

Esempio

Un'industria dolciaria produce due tipi di cioccolatini. Uno fondente e l'altro al latte. Per produrre un Hg di cioccolatini di tipo fondente occorrono 80 g di cacao e 20 g di zucchero, per produrre un Hg di cioccolatini al latte occorrono 50 g di cacao, 30 g di zucchero e 20 g di latte in polvere. L'industria ha a disposizione, per un ciclo di lavorazione, 20 Kg di cacao, 12 Kg di zucchero e 4 Kg di latte in polvere. Vende i cioccolatini di tipo fondente a €3 all'ettogrammo e i cioccolatini di tipo al latte a € 2,6 all'ettogrammo. Determinare la combinazione produttiva che consente il massimo ricavo.

Risolvere:

x_1 : hg di cioccolatini di tipo fondente

x_2 : hg di cioccolatini al latte

FUNZIONE OBIETTIVO: $z = 3x_1 + 2,6x_2$

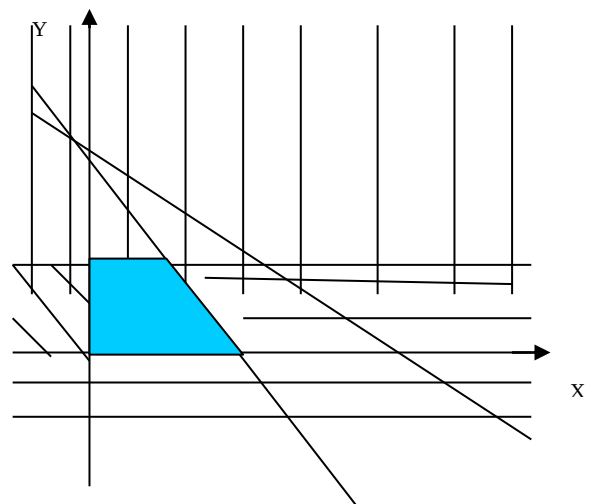
	CIOCC. FOND.	CIOCC. LATTE	RISORSE
CACAO (g)	80	50	20.000
ZUCCHERO (g)	20	30	12.000
LATTE POL. (g)		20	4.000

Dall'analisi della tabella si deduce il modello del problema

$$z = 3x_1 + 2,6x_2$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 200 \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 \leq 120 \\ 0,2x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il campo di scelta è rappresentato dal trapezio colorato in figura, frontiera inclusa



Studio l'andamento della funzione utile z mediante le linee di livello per determinare il punto di massimo:

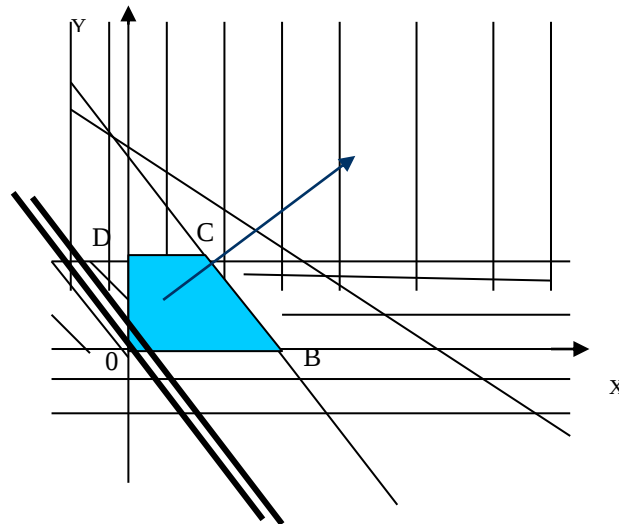
$$\begin{cases} z = 3x_1 + 2,6x_2 \\ z = k \end{cases}$$

Per: $3x_1 + 2,6x_2 - 100 = 0$
 $K = 100$

x_1	0	1/30
x_2	1/26	0

$K = 200$ $3x_1 + 2,6x_2 - 200 = 0$

x_1	0	1/15
x_2	1/13	0



Poiché le linee di livello crescono nella direzione della freccia, il massimo ricavo si otterrà in corrispondenza al punto C le cui coordinate sono $C(125; 200)$; dunque l'ottimo della funzione si ha con una produzione di 125 hg di cioccolatini fondenti e 200 hg di cioccolatini al latte con un ricavo

$$z(C) = 3(125) + 2,6(200) = 895 \text{ in euro.}$$

Poiché sappiamo che l'ottimo si ottiene solo in corrispondenza di uno dei vertici del campo di scelta, possiamo anche calcolare il valore di z in corrispondenza dei vertici del poligono di scelta e aver conferma della soluzione trovata:

$$Z(O) = 3(0) + 2,6(0) = 0$$

$$Z(B) = 3(250) + 2,6(0) = 750$$

$$\mathbf{Z(C) = 3(125) + 2,6(200) = 895}$$

$$Z(D) = 3(0) + 2,6(300) = 780$$