

PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA ED EFFETTI IMMEDIATI E DIFFERITI

In questi problemi sono presenti delle grandezze che assumono valori che non si possono predeterminare ma che dipendono dal verificarsi dell'evento considerato in funzione di una certa probabilità. Tali eventi aleatori (o casuali) sono incompatibili a 2 a 2 e la loro somma logica (probabilità totale) risulta essere l'evento certo al quale si tende per avere la certezza di riuscita del problema. Esisteranno quindi un certo numero di ALTERNATIVE che chiameremo $A_1, A_2, \dots, A_n$ e degli EVENTI che chiameremo $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Tali EVENTI sono generalmente associati a rispettive PROBABILITÀ che chiameremo $P_1, P_2, \dots, P_m$. Ad ogni ALTERNATIVA corrisponderanno m EVENTI con m relative PROBABILITÀ.

Si possono presentare 3 tipi di problemi in condizioni di incertezza con effetti immediati:

1. CRITERIO DEL VALORE MEDIO (caso a)
2. CRITERIO DEL PESSIMISTA (caso b)
3. CRITERIO DEL VALORE MEDIO CON VALUTAZIONE DEL RISCHIO (caso c);

e 1 tipo di problema in condizioni di incertezza con effetti differiti (caso d).

a) CRITERIO DEL VALOR MEDIO

Siano $E_1, E_2, \dots, E_n$ gli EVENTI associati alle probabilità $P_1, P_2, \dots, P_n$. Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ le alternative. L'alternativa A_1 è associata all'Evento E_1 dalla grandezza 5; la stessa alternativa è associata all'Evento E_2 dalla grandezza 5 etc. Si viene così a formare una matrice di grandezze a_{ik} dove l'indice i si riferisce all'EVENTO mentre l'indice k si riferisce all'ALTERNATIVA.

Per effettuare la scelta si costruisce una tabella o matrice dei risultati:

eventi	alternative				p_i
	A_1	A_2		A_n	
E_1	5	4		2	$p_1 \ 0,3$
E_2	5	4		4	$p_2 \ 0,25$
.....	..	..		..	
E_n	5	7		10	$p_n \ 0,25$

Le colonne, tranne l'ultima che riporta le probabilità di ciascun evento, contengono i valori associati agli eventi che possono verificarsi in corrispondenza delle possibili alternative. L'elaborazione dei dati della tabella, permette di individuare la scelta ottimale.

IL CRITERIO DEL VALOR MEDIO (o della speranza matematica) consiste nel calcolare, per ogni alternativa, il valor medio dei risultati dati dalla SOMMATORIA dei prodotti dati dalla formula:

$$M(A_k) = \sum_i a_{i,k} p_i$$

Si sceglierà quindi il valore MEDIO maggiore se si cerca il profitto o guadagno o ricavo massimo e viceversa si sceglierà il valore minore se si cerca un costo minimo.

Per chiarire meglio l'argomento si presenta un semplice esempio:

Per la produzione di un bene un'industria può seguire 2 processi produttivi che comportano costi diversi. Le due alternative sono:

A1) Spese fisse di € 3.000,00 e costo di € 14,00 per ogni pezzo prodotto;

A2) Spese fisse di € 800,00 costo di € 8,00 per ogni pezzo prodotto e un costo di manutenzione pari al 5% del quadrato delle quantità prodotte.

Il bene è venduto a € 30,00 al pezzo.

Sappiamo anche che le quantità vendute sono aleatorie (casuali) ed hanno le relative probabilità:

Quantità → 500 1.000 1.500 2.000 2.500
Probabilità → 0,10 0,25 0,30 0,20 0,15

Si chiede quale risulta il processo produttivo più conveniente.

Innanzitutto dal testo si comprende (processo produttivo più conveniente) che si deve calcolare, per ogni alternativa, la

FUNZIONE PROFITTO = FUNZIONE RICAPO - FUNZIONE COSTI

Detti x il numero dei pezzi prodotti e y il guadagno, le funzioni del guadagno sono rispettivamente:

per l'alternativa A1) $y = 16x - 3.000$

per l'alternativa A2) $y = -0.05x^2 + 22x - 800$

Costruiamo la tabella dei risultati calcolando per ogni alternativa i possibili guadagni secondo la quantità che l'azienda prevede di vendere:

		ALTERNATIVE		PROBABILITA'
		A	B	
EVENTI	500	5.000	8.950	0,10
	1.000	13.000	16.200	0,25
	1.500	21.000	20.950	0,30
	2.000	29.000	23.200	0,20
	2.500	37.000	22.950	0,15

Calcoliamo la speranza matematica degli utili di ogni alternativa:

$$M(A) = 5.000 \times 0,10 + 13.000 \times 0,25 + 21.000 \times 0,30 + 29.000 \times 0,20 + 37.000 \times 0,15 = 21.400$$

$$M(B) = 8.950 \times 0,10 + 16.200 \times 0,25 + 20.950 \times 0,30 + 23.200 \times 0,20 + 22.950 \times 0,15 = 19.312,50$$

Per l'alternativa A il VALOR MEDIO risulta 21.400

Per l'alternativa A2 il VALOR MEDIO risulta 19.312,50

Di conseguenza con il criterio del valore medio il processo produttivo più conveniente è dato dall'alternativa A.

b) CRITERIO DEL MAXIMIN o DEL MINIMAX detto anche CRITERIO DEL PESSIMISTA

Risulta essere un criterio molto semplice seppur molto discutibile. Tale criterio si attua determinando per ogni alternativa il valore minimo e fra questi si sceglie poi l'alternativa

corrispondente al massimo, se si tratta di utili (massimizzazione); se si affronta un problema di costi (minimizzazione), invece, si scelgono i valori massimi e si sceglie poi l'alternativa corrispondente al minimo.

Quindi, se si deve cercare un massimo profitto o ricavo o guadagno, si vanno a cercare i Minimi valori trovati per le due alternative per una determinata quantità'. Si accetta quindi il MAX valore che è 82.500,00 e quindi conviene con tale criterio l'alternativa A2.

Nel caso che si doveva calcolare un Minimo costo si prendevano i MAXI valori e di essi si prendeva il Minimo.

E' possibile formulare un criterio di scelta anche se non si conoscono le probabilità o non se ne vuole tenere conto

Esempio: Un'industria deve decidere quale fra tre progetti A,B,C deve attuare per produrre tre prodotti L,M,N. Per decidere si basa sulla probabilità di vendita così stimata : 0.5 per L, 0.2 per M, 0.3 per N.

Ogni produzione prevede diversi costi e ricavi, a seconda che si attuino i progetti A,B,C. Nella tabella sono riportati i guadagni previsti.

Determinare quale progetto è il più conveniente senza utilizzare la distribuzione di probabilità. Es. Acquisto quantità A,B,C di merce deperibile per rivenderla in quantità L,M,N con guadagni in tabella (si tiene conto dell'inventario e degli sconti per grandi quantità)

	A	B	C	Probabilità
L	150	40	10	0.5
M	90	160	110	0.2
N	60	120	190	0.3

La tabella rappresenta guadagni: abbiamo un problema di massimo

	A	B	C	Probabilità
L	150	40	10	0.5
M	90	160	110	0.2
N	60	120	190	0.3

Volendo non valutare la probabilità assegnata agli eventi, per ogni colonna scegliamo il risultato peggiore

	A	B	C	Probabilità
L	150	40	10	0.5
M	90	160	110	0.2
N	60	120	190	0.3

60

40

10

E fra questi scegliamo il maggiore: alternativa A

Se la tabella rappresenta costi: abbiamo un problema di minimo

	A	B	C	Probabilità
L	150	40	10	0.5
M	90	160	110	0.2
N	60	120	190	0.3

Volendo non valutare la probabilità assegnata agli eventi, per ogni colonna scegliamo il risultato più grande

	A	B	C	Probabilità
L	150	40	10	0.5
M	90	160	110	0.2
N	60	120	190	0.3

150 160 190

E fra questi scegliamo il minore: alternativa A

Tale criterio è detto del maxi-min o del mini-max (o criterio del pessimista). Si attua determinando per ogni alternativa il valore minimo e fra questi si sceglie poi l'alternativa corrispondente al massimo, se si tratta di utili (massimizzazione);

se si affronta un problema di costi (minimizzazione), invece, si scelgono i valori massimi e si sceglie poi l'alternativa corrispondente al minimo.

c)Criterio del valor medio con valutazione del rischio

Per ogni alternativa

- Si calcola lo scarto quadratico medio $\sigma_K = \sqrt{\sum_i [a_{i,k} - M(A_K)]^2 p_i}$
- Se valori medi sono uguali si sceglie $\rightarrow A_K$ con σ_K minore
- Se valori medi sono diversi si procede con $\rightarrow$ determinazione del livello di rischio
 $L_K = M(A_K) / n$ ($n = 1, 2, ..$)
- Se $\sigma_K \leq L_K$ (n fissato) si confrontano i valori medi e si sceglie l'alternativa corrispondente al più conveniente

Il criterio di scelta stabilisce che:

- se si tratta di un guadagno si sceglierà l'alternativa con valore medio maggiore;
- se si tratta di un costo quella con valore medio minore.

Poiché spesso nella realtà si possono presentare alternative con valori medi non significativamente diversi, per la scelta è opportuno tenere conto oltre che del valore medio, anche dello SQM:

- a parità di valore medio, si sceglierà l'alternativa con SQM minore;
- a parità di SQM, si sceglierà l'alternativa con valore medio maggiore.

In questi tipi di problemi, si fissa anche il livello massimo di rischio che si è disposti a sopportare, espresso come frazione del valore medio.

Si confronta lo SQM con il massimo rischio sopportato:

- se lo SQM risulta minore o uguale al max rischio sopportato, si confrontano i valori medi
- se lo SQM risulta maggiore del max rischio sopportato, si scarta l'alternativa perché troppo rischiosa.

Riprendiamo il precedente esempio 2; si erano calcolate le speranze matematiche e si era trovato:
 $M(A) = 21.400$

$M(B) = 19.312,50$

Si calcola lo scarto quadratico medio per ogni alternativa:

$$\delta(A) = \sqrt{(5.000 - 21.400)^2 * 0,10 + \dots + (5.000 - 21.400)^2 * 0,15}$$

$$\delta(B) = \sqrt{(8.950 - 19.312,5)^2 * 0,10 + \dots + (22.950 - 19.312,5)^2 * 0,15}$$

Fissiamo come livello massimo di rischio accettabile un terzo del valore medio.

Confrontiamo lo scarto quadratico medio per ogni alternativa con il livello di rischio.

Costruiamo una tabella che riassume i valori:

ALTERNATIVE	A	B
VALORI MEDI	21.400	19.312,5
SCARTI QUADRATICI MEDI	9.624,97	4.355,65
VALORI $\frac{M(A_h)}{3}$	7.133,3	6.437,5

Poiché risulta: $\delta(A) = 9.624,97 > \frac{M(A)}{3} = 7.133,3$

$$\delta(B) = 4.355,65 < \frac{M(B)}{3} = 6.437,5$$

si rifiuta l'alternativa A perché troppo rischiosa e si sceglie l'alternativa B meno rischiosa, anche se il suo valore medio è inferiore.

d)PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA ED EFFETTI DIFFERITI

Risultano essere problemi molto simili a quelli in condizioni di certezza con effetti differiti solo che i ricavi o i costi dipendono da variabili casuali e quindi sono anche da considerare relative probabilità'

Si presenta un esempio che chiarisce quanto detto:

Si vuole investire il capitale di E 16.000,00 e si può scegliere tra le due alternative:

A1) Ricavo tra 2 anni di E 15.000,00 certe e fra 4 anni E 15.000,00 con probabilità del 70% oppure E 25.000,00 con probabilità del 30%.

A2) Ricavo per 4 anni rate di E 10.000,00 posticipate con probabilità del 40% oppure rate di E 7.000,00 con probabilità del 60%.

Si chiede l'operazione più conveniente al tasso del 9%

Le 2 probabilità determinano una somma logica di due eventi (si noti il termine <oppure>)

Per l'alternativa A1 si avrà:

$$15.000,00 * 1,09^{(-2)} + 15.000,00 * 1,09^{(-4)} * 0,7 + 25.000,00 * 1,09^{(-4)} * 0,3 - 16.000,00 = 9.376,854 \text{ (GUADAGNO EFFETTIVO)}$$

Per l'alternativa A2 si avrà:

$$10.000,00 * a[4/0,09] * 0,4 + 7.000,00 * a[4/0,09] * 0,6 - 16.000,00 = 10.565,703 \text{ (GUADAGNO EFFETTIVO)}$$

Di conseguenza l'investimento migliore è dato dall'alternativa A2