

Il problema delle scorte

Ogni impresa industriale, per la sua produzione, necessita di avere in magazzino una quantità sufficiente di materie prime da impiegare nell'attività produttiva; anche qualsiasi ditta commerciale ha bisogno di avere in magazzino una adeguata scorta delle varie merci per soddisfare le esigenze dei clienti.

Il problema delle scorte è perciò molto importante e riguarda tutte le imprese.

In genere per questo problema si considerano due tipi di costi:

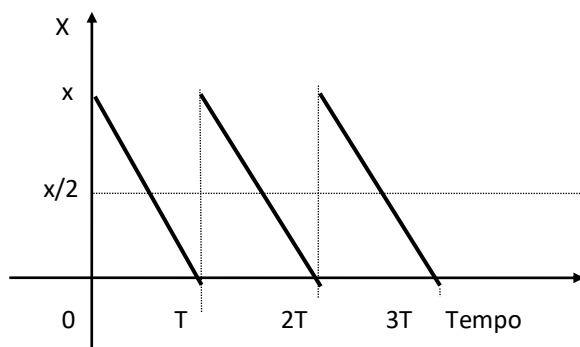
- costi per le ordinazioni: oltre alle spese per la merce ordinata si sostengono delle spese fisse, perciò sarebbe opportuno diminuire le ordinazioni ma aumentarne la quantità;
- costi di stoccaggio del magazzino: la conservazione della merce in magazzino comporta varie spese per assicurazione, sorveglianza, deperimento, ecc. per cui è preferibile avere in giacenza una piccola quantità di merce continuamente rinnovabile.

Le due esigenze sono fra loro contrastanti, perciò si cerca di determinare la quantità di merce da ordinare ogni volta in modo da rendere minima la spesa complessiva per le ordinazioni e il magazzino.

Per risolvere questo problema si assumono due ipotesi semplificatrici:

- si suppone che il consumo della merce sia uniforme nel tempo;
- si suppone che la merce ordinata arrivi appena è esaurita la scorta.

In base a queste ipotesi ci sarà la seguente situazione di magazzino in funzione del tempo:



Si indica con x la quantità di merce da ordinare ogni volta, e con T l'intervallo costante di tempo che intercorre tra due ordinazioni.

Avendo supposto un consumo uniforme nel tempo, il livello delle scorte di magazzino decresce in modo lineare e diventa nullo un istante prima dell'arrivo della successiva ordinazione.

Esaminiamo ora i costi per:

- ❖ spese per le ordinazioni:

se indichiamo con Q la quantità di merce necessaria per un dato intervallo di tempo, il numero delle ordinazioni occorrenti, essendo x la quantità di merce ogni volta ordinata, è dato da:

$$\frac{Q}{x}$$

Se ogni ordinazione comporta anche una spesa fissa S , la spesa per le ordinazioni da effettuare in quell'arco di tempo sarà data da:

$$S\left(\frac{Q}{x}\right)$$

❖ spese di magazzino:

Avendo presupposto un consumo uniforme, il valore medio della scorta è uguale alla media aritmetica fra la giacenza massima X e la giacenza minima 0 , cioè il valore medio sarà dato da:

$$\frac{x+0}{2} = \frac{x}{2}$$

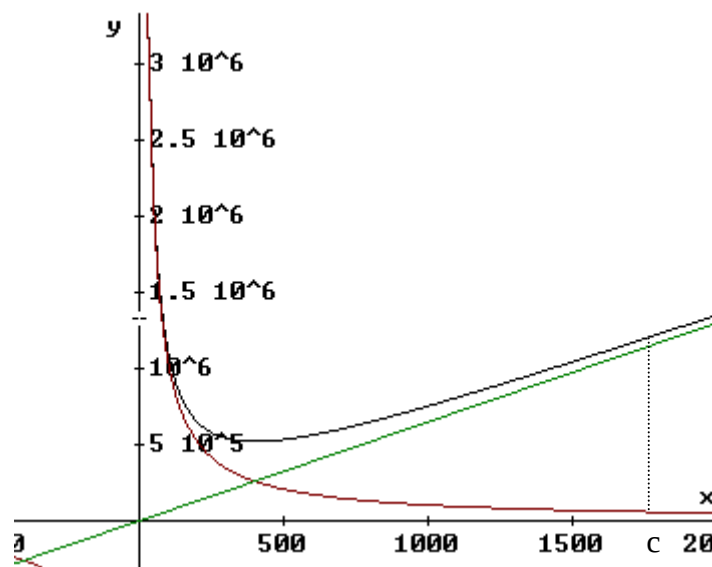
Le spese di magazzino si considerano proporzionali alla spesa media $x/2$; indicando con S il costo di magazzino di ogni unità di scorta nello stesso intervallo di tempo, esse risultano:

La funzione economica da rendere minima è perciò data dal seguente costo totale:

$$y = S\left(\frac{Q}{x}\right) + S\left(\frac{x}{2}\right) \quad 0 < x \leq c$$

Essendo c il vincolo rappresentato dalla capienza c del magazzino.

La funzione è somma di un'iperbole equilatera e di una funzione lineare ed ha un andamento di questo tipo.



Per determinare il minimo del costo Y si annulla la derivata prima:

$$y' = -\frac{SQ}{x^2} + \frac{s}{2} \longrightarrow -\frac{SQ}{x^2} + \frac{s}{2} = 0 \longrightarrow x_0 = \sqrt{2\frac{SQ}{s}}$$

Poiché la funzione è decrescente per $0 < x < \sqrt{2\frac{SQ}{s}}$

e crescente altrove nel proprio dominio, x_0 è punto di minimo; infatti

$$y' < 0 \text{ per } x < \sqrt{2\frac{SQ}{s}} \text{ e } y' > 0 \text{ per } x > \sqrt{2\frac{SQ}{s}}$$

x_0 è dunque il punto di minimo cercato, compatibilmente con la capacità del magazzino. Il costo minimo per ogni ordinazione è pari a

$$\sqrt{2SQs}$$

La quantità che rende minima la spesa è anche detta comunemente in economia lotto economico.

1. Un'impresa commerciale per 300 giorni all'anno ha una vendita media giornaliera di 80 kg di una merce.

Ogni ordinazione comporta una spesa fissa di € 16 e le spese annue di magazzinaggio sono di € 1,2 al chilogrammo.

Determinare la quantità ottima da ordinare ogni volta, il numero di ordinazioni all'anno e la loro periodicità nei due seguenti casi:

a) la capacità del magazzino è di 12 q;

b) la capacità del magazzino è di 6 q.

La quantità di merce necessaria in un anno è:

$$Q = 80 \times 300 = 24.000 \text{ kg}$$

Indicata con x la quantità di merce (in chilogrammi) da ordinare ogni volta, il numero delle ordinazioni necessarie in un anno è $\frac{24.000}{x}$ con una spesa in euro di $16 \cdot \frac{24.000}{x}$.

Le spese di magazzinaggio sono $1,2 \cdot \frac{x}{2}$

La spesa annua complessiva per ordinazioni e magazzinaggio risulta:

$$y = 16 \cdot \frac{24.000}{x} + 1,2 \cdot \frac{x}{2}$$

a) Se la capacità del magazzino è di 12 quintali si ha il modello matematico:

$$\begin{cases} y = \frac{384.000}{x} + 0,6x \\ 0 < x \leq 1.200 \end{cases}$$

Annullando la derivata prima:

$$y' = -\frac{384.000}{x^2} + 0,6$$

$$x = \pm 800$$

La funzione, che si rappresenta con un'iperbole non equilatera di asintoti $x = 0$ e $y = 0,6x$, nel campo di scelta ha un minimo per $x = 800$ a cui corrisponde una spesa complessiva di € 960. In questo caso il vincolo della capienza del magazzino di 1.200 kg non influisce sulla scelta. Quindi la minima spesa annua per ordinazioni e magazzinaggio è di € 960 per ordinazioni di 800 chilogrammi.

Il numero delle ordinazioni occorrenti in un anno è $\frac{24.000}{800} = 30$ con periodicità

$$T = \frac{360}{30} = 12 \text{ giorni.}$$

Perciò occorrono 30 ordinazioni all'anno e ogni 12 giorni la merce del magazzino si rinnova.

b) Se il magazzino ha la capienza di 600 kg il vincolo risulta:

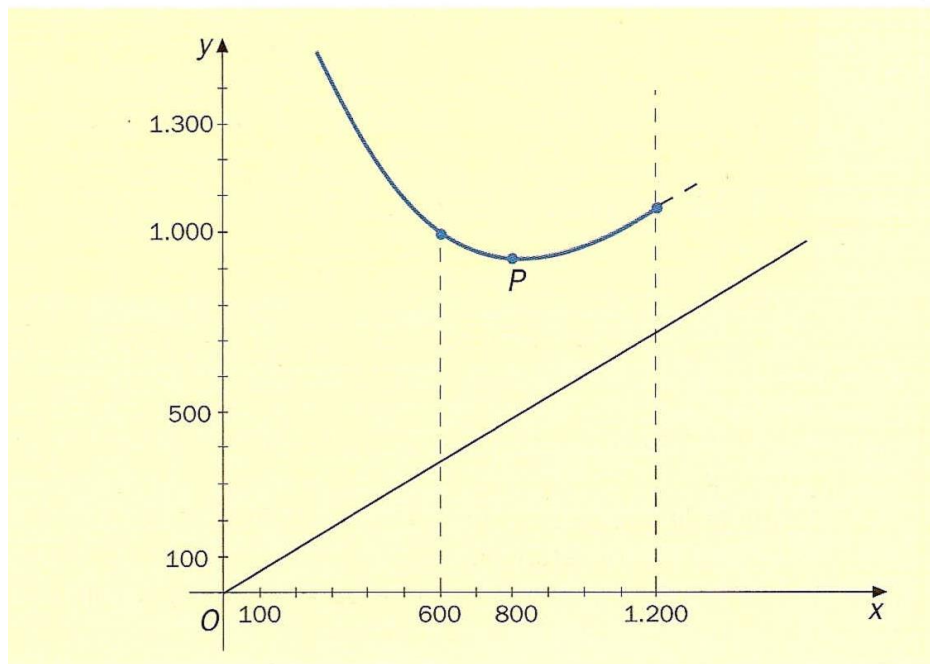
$$0 < x \leq 600$$

e la funzione ha il minimo assoluto per $x = 600$ in quanto la funzione nel campo di scelta è decrescente fino al minimo (come si può anche rilevare dalla rappresentazione grafica).

Il numero delle ordinazioni occorrenti in un anno è $\frac{24.000}{600} = 40$ con periodicità

$$T = \frac{360}{40} = 9 \text{ giorni.}$$

Il costo per ordinazioni e magazzinaggio è di € 1.000, superiore al precedente. Rappresentiamo graficamente la funzione:



Se l'acquisto della merce prevede delle riduzioni per acquisti superiori ad una certa quantità, si deve tenere conto anche del costo della merce. La funzione che esprime il costo complessivo, comprendente il costo della merce, è data da:

$$y = S\left(\frac{Q}{x}\right) + S\left(\frac{x}{2}\right) + \text{spese per la merce}$$

con il vincolo $0 < x \leq c$