

Regimi di capitalizzazione

Per calcolare il *montante*, ovvero la somma di denaro disponibile al termine di un'operazione *finanziaria*, esistono molti procedimenti, ciascuno dei quali costituisce un **regime di capitalizzazione**.

La **capitalizzazione** è un'operazione finanziaria con cui si calcola il valore di un capitale disponibile al tempo presente, in un determinato tempo futuro.

Le due situazioni tipiche sono

- *regime di capitalizzazione **semplice***, quando l'interesse è proporzionale al capitale e al tempo, in questo caso è il solo il capitale che produce interesse;
- *regime di capitalizzazione **composta***, dove l'interesse è fruttifero, cioè contribuisce all'aumento progressivo del capitale.

La capitalizzazione semplice

Definizione: una legge di capitalizzazione si dice *semplice*, se l'interesse è direttamente proporzionale al capitale e al tempo d'impiego.

La proporzionalità diretta dell'interesse rispetto a capitale e tempo si esprime con la formula

$$I = C \cdot i \cdot t$$

dove C è il capitale, t il tempo e I l'interesse semplice.

La costante di proporzionalità *i* è detta il **tasso annuo unitario** e rappresenta l'interesse maturato da un euro in un anno.

Al termine dell'operazione finanziaria si disporrà di una quantità di denaro, detta **montante**, che è risultante dalla somma del capitale iniziale e dell'interesse maturato:

$$M = C + I$$

Esempio:

Calcoliamo l'interesse semplice maturato da un capitale di euro 1020, impiegato a 3%, dopo un anno

$I = \text{euro } 1020 \cdot 3\% = \text{euro } 30,6$ A questo punto calcoliamo il montante M:

$M = C + I = \text{euro } (1020 + 30,6) = \text{euro } 1050,6$

Le formule inverse nel regime finanziario di capitalizzazione semplice

Partendo dalla formula iniziale $I = C \cdot i \cdot t$ possiamo ricavare le formule inverse, per calcolare rispettivamente il capitale, il tasso d'interesse, il tempo d'impiego del capitale:

$$C = I / (i \cdot t)$$

$$i = I / (C \cdot t)$$

$$t = I / (C \cdot i)$$

Vediamone alcuni esempi di utilizzo.

Esempio 1:

Calcolare quale capitale dobbiamo impiegare per 5 mesi al tasso annuo del 4% per ottenere un interesse di 400 euro. La formula da usare è la seguente: $C = I / (i \cdot t)$ quindi avremo:

$$C = 400 \text{ euro} / (4/100 \cdot 5/12) = 400 \cdot 60 = 24000 \text{ euro}$$

Esempio 2:

Calcolare a quale interesse annuo deve essere impiegato il capitale di euro 2150 per 6 mesi, per ottenere l'interesse pari ad euro 200. La formula da usare è la seguente: $i = I / (C \cdot t)$ quindi avremo:

$$i = 200 / (2150 \cdot 6/12) = 0,0465$$

Esempio 3:

Calcolare per quanto tempo si deve impiegare al tasso del 7% un capitale che ammonta a euro 32440 per ottenere l'interesse che ammonta ad euro 2325. La formula da usare è la seguente: $t = I / (C \cdot i)$ quindi avremo:

$$t = 2325 / (32440 \text{ euro} \cdot 7/100) = 1023$$

Proposte di esercizi

In regime di capitalizzazione semplice determinare il montante e l'interesse.

1. $C = 72.000 \text{ €}$ $t = 4a$ $i = 0,0575$ ($M = 88.560$; $I = 16.560$)
2. $C = 16.475 \text{ €}$ $t = 3a$ $r = 3,75\%$ ($M = 18.328,43$; $I = 18.53,43$)

Risolvi i seguenti problemi in regime di capitalizzazione semplice, determinando le due grandezze mancanti.

1. $M = 16.000 \text{ €}$ $C = 10.973 \text{ €}$ $t = 4a$ ($i = 0,1125$; $r = 11,25\%$)
2. $M = 15.000 \text{ €}$ $C = 10.000 \text{ €}$ $i = 0,05$ ($t = 10a$)
3. $M = 53.000 \text{ €}$ $i = 0,08$ $t = 2a$ ($C = 45.689,65$)

Risolvi i seguenti problemi sulla capitalizzazione semplice.

1. Il signor Carlo deposita in banca €. 8.000 al tasso del 5,75%. Dopo 2 anni preleva la somma e la investe al

tasso del 6,25%. Quanto potrò disporre 7 anni dopo l'ultima operazione?

(€. 12.822,50)

LA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Definizione: un regime di capitalizzazione è composto se l'interesse maturato nel periodo preso come unità di tempo viene aggiunto al capitale e concorre a produrre l'interesse dei periodi successivi.

ES: calcoliamo il montante in regime di capitalizzazione composta di euro 8000 impiegate per 3 anni al 5,50%

Dopo il primo anno, essendo $t=1$ il montante è

$$M_1 = C(1+i) = 8000 * (1+0,055) = 8440 \text{ euro}$$

In capitalizzazione composta, questo montante viene preso come nuovo capitale che genera interesse nel secondo anno.

$$M_2 = M_1(1+i) = 8440 * (1+0,055) = 8904,20 \text{ euro}$$

In capitalizzazione composta, questo montante viene preso come nuovo capitale che genera interesse nel terzo anno

$$M_3 = M_2(1+i) = 8904,20 * (1+0,055) = 9393,93 \text{ euro}$$

Problemi inversi

Esaminiamo con degli esempi il modo in cui dalla formula del montante si ricavano il capitale, il tasso e il tempo.

1. Ricaviamo il capitale iniziale

Dalla formula del montante $M = C(1+i)^t$ ricaviamo l'incognita C:

$$C = M / (1+i)^t$$

ES: Determiniamo quale somma dobbiamo oggi investire la tasso del 2,75% in regime di interesse composto per ottenere fra 3 anni euro 895.

$$C = 875 / (1+0,0275)^3 \text{ da cui ricaviamo } C = 875 / 1,0275^3 = 806,60 \text{ euro}$$

La somma da investire, approssimata, è 806,60 euro oppure possiamo anche dire che 806,60 è il valore attuale di 875 euro

2. Ricaviamo il tasso

Partendo dalla formula del montante ricaviamo l'incognita i .

$$(1+i)^t = M/C$$

eleviamo entrambi i membri alla potenza con esponente $1/t$

$$1+i = (M/C)^{1/t}$$

$$\text{ricaviamo } i, \quad i = (M/C)^{1/t} - 1$$

ES: determiniamo il tasso percentuale necessario per produrre un montante a interesse composto di euro 9325 se si deposita 6420 euro per 4 anni.

Applicando la formula del montante otteniamo:

$$9325 = 6420 (1+i)^4$$

da cui, dividendo entrambi i membri per 6420,

$$(1+i)^4 = 9325/6420$$

ed elevando entrambi i membri alla potenza con esponente $1/4$ si ha:

$$1+i = (9325/6420)^{1/4}$$

$$i = (9325/6420)^{1/4} - 1 =$$

Il calcolo del montante:

per i tempi interi

Calcoliamo il montante **M** dopo **n** anni

- alcune regole

$$M_1 = C (1 + C)^1$$

$$M_2 = M_1 (1 + C) = C (1 + C) (1 + C) = C (1 + C)^2$$

$$M_3 = M_2 (1 + C) = C (1 + C)^2 (1 + C) = C (1 + C)^3$$

- Ripetendo il procedimento **n** tante volte otteniamo:

$$M = C (1 + C)^n, n \in \mathbb{N}$$

La formula che abbiamo ricavato cioè $(1 + C)^n$ è detta capitalizzazione composta. se $C = 1$, M è uguale a tale fattore, che è il montante a interesse composto da un'unità monetaria impiegata dal tasso 1 per n anni.

Esempio:

Se calcoliamo il montante del capitale di 10000, impiegato per 5 anni a interesse composto al 3,5%

$$M = C (1 + i)^n = 10000 * (1 + 0,035)^5 = 11876$$

Il montante è di euro 11876

- Dalla formula del montante possiamo ricavare quella dell'interesse

$$I = M - C = C (1 + C)^n - C = C [(1 + C)^n - 1].$$

IL CALCOLO DE MONTANTE:

Per i tempi non interi

In quest' altro caso si può ottenere M calcolando prima il montante a interesse composto per il numero intero e sul risultato mettiamo il montante a interesse semplice per la frazione di un anno. Se si procede in questo modo si ottiene una conversione mista o lineare.

Esempio:

Cerchiamo di determinare il montante in regime di capitalizzazione composta nella conversione mista di 3000 euro al 6% per 3 anni e 6 mesi.

In un primo momento si calcola il montante relativo a 3 anni.

$$M_3 = 3000 (1 + 0,06)^3 = 1,1910$$

Poi utilizziamo M_3 come capitale nella formula del montante a interesse semplice per 6 mesi.

$$M = 1,1910 * (1 + 0,06 * 6/12) = 3,64446$$

La somma che abbiamo trovato la arrotondiamo 3,65.

In genere, dato T non intero, detto n che è il numero intero di anni e F frazione di anno cioè $(T = n + F)$ il montante $M =$

$$M = C (1 + C)^{n+f}$$

A questo punto calcoliamo il montante dell'esempio precedente:

$$M = C (1 + C)^{n+f} = 3000 * (1 + 0,06)^3 + 6/12 = 3575,048 \text{ il montante è di euro } 3575,48.$$

PER ESERCITARSI (La capitalizzazione composta)

1. Una persona a depositato 3 anni fa un capitale di euro 5000. Un anno dopo ha depositato euro 5000 al tasso del 6% uguale al precedente. Si vuole sapere di quale montante dispone attualmente

$$[M=5000(1+0,06)+5000, (1+0,06 \cdot 2) = 11500]$$

2. Tre anni fa sono stati depositati euro 5000 al tasso del 6%, un anno dopo è stato prelevato il montante maturato ed è stato depositato insieme ad un altro capitale di euro 5000 allo stesso tasso. Si vuole sapere qual è il montante totale annuale.

$$M=[5000(1+0,06)+5000] \cdot (1+0,06 \cdot 2)= 11536$$

■ Risolvi i seguenti problemi in regime di capitalizzazione composta per tempi interi, determinando il montante e l'interesse.

- | | | | |
|-------------|--------|------------------|-------------------|
| 1. C= 2500 | i=8% | t=5 ^a | [M= 3673,32] |
| 2. C= 15000 | i=0,08 | t=2 ^a | [I=2496] |
| 3. C= 9906 | i=0,06 | t=4 ^a | [M=12506,10 euro] |
| | | | [I= 2600,10 euro] |