

CONTENUTO DELLA MATEMATICA FINANZIARIA

La MATEMATICA FINANZIARIA

è quella parte della matematica che viene applicata allo studio delle operazioni finanziarie.

Si definisce operazione finanziaria qualunque operazione che dia origine allo scambio tra prestazioni riferite ad epoche diverse.

Per le operazioni finanziarie sono possibili diverse classificazioni; noi ci limitiamo a considerarne due

OPERAZIONI FINANZIARIE IN SENSO STRETTO E OPERAZIONI FINANZIARIE IN SENSO LATO

- Operazioni finanziarie in senso stretto sono quelle connesse a tipiche operazioni di credito. Sono tali per esempio le operazioni di mutuo, le operazioni di deposito in c/c;
- Operazioni finanziarie in senso lato sono tutte quelle altre operazioni che pur non essendo strettamente riferite al credito in senso stretto, realizzano pur sempre uno scambio tra prestazioni effettuate in epoche diverse. Es. l'acquisto di un terreno che viene poi rivenduto

OPERAZIONI FINANZIARIE SEMPLICI

OPERAZIONI FINANZIARIE COMPLESSE

- Operazioni finanziarie semplici sono quelle caratterizzate da una sola prestazione, iniziale, ed una sola controprestazione, finale (*operazione finanziaria semplice o elementare*),
- Operazioni finanziarie complesse sono quelle caratterizzate da più prestazioni, di cui una almeno iniziale e le altre nel corso dell'operazione, e da più controprestazioni, di cui almeno una alla fine dell'operazione e le altre in periodo antecedente (*operazione finanziaria complessa*).
- A seconda che le prestazioni e le controprestazioni si verifichino con *certezza*, cioè non condizionate, oppure il loro verificarsi dipenda dall' *avverarsi di eventi legati al caso* si classificano le operazioni in *certe ed aleatorie* .

EVOLUZIONE DELLA MATEMATICA FINANZIARIA

Nel passato, la Matematica finanziaria si interessava generalmente di operazioni connesse con il credito bancario o privato e si indicava come Teoria del Credito. Ora il campo di influenza si è notevolmente ampliato e si parla di

APPLICAZIONI DI MATEMATICA FINANZIARIA

cioè lo studio dei problemi relativi alle determinazioni e valutazioni di fatti economici non necessariamente legati al credito,

come ad esempio la scelta degli investimenti, la valutazione finale del risultato economico ottenuto dall'impiego di capitali nella produzione, ecc.

Allora diremo, per offrire una definizione, se non completa univoca, che

«la matematica finanziaria è quella branca della matematica applicata che si occupa di operazioni economico-finanziarie».

Per operazioni economico-finanziarie si intendono tutte le operazioni economiche che hanno per oggetto l'impiego di uno o più capitali monetari o riconducibili ad una valutazione monetaria.

SOGGETTI COINVOLTI

Nelle operazioni finanziarie agiscono tre *soggetti*:

- chi dispone del capitale e lo vuole impiegare;
 - Intermediari;
- chi richiede ed accetta il capitale per l'uso.

I primi due soggetti dell'operazione fisicamente possono essere rappresentati da due o più persone.

Agli effetti pratici coloro che dispongono dei capitali rappresenteranno una *parte* e coloro che accettano i capitali per l'impiego la *controparte*.

ELEMENTI DI UNA OPERAZIONE FINANZIARIA

Nelle operazioni finanziarie abbiamo pertanto almeno due azioni od obbligazioni finanziarie:

prestazione e controprestazione:

Prestazione da parte di chi cede il capitale di sua proprietà, azione che si attua all'inizio o durante l'operazione finanziaria;

Controprestazione da parte di chi, ottenuto il capitale per l'uso, è impegnato a renderlo ad un certo tempo o in tempi successivi.

Questa ultima azione si attua generalmente alla fine o durante l'operazione finanziaria.

GRANDEZZE IN EQUILIBRIO

In matematica finanziaria esistono quattro grandezze fondamentali in equilibrio tra loro:

- capitale
- tasso
- pagamento (rata)
- numero di pagamenti (durata)

Il principio di fondo dell'equazione che regola le loro relazioni stabilisce che la modifica di uno di questi valori imporrà di cambiarne anche uno o più degli altri.

ARGOMENTI PRINCIPALI

Che cos'è l'interesse
Che cos'è il montante
Storia dell'interesse
Capitalizzazione semplice
Capitalizzazione composta

CHE COS'È L'INTERESSE

L'interesse è il compenso spettante a colui che concede in prestito un capitale, rinunciando per un certo periodo di tempo al suo utilizzo.

Il tasso di interesse si può anche definire come l'interesse maturato sull'unità di capitale prestato per unità di tempo.

STORIA DELL'INTERESSE

Nel corso della storia l'interesse è stato visto come:

- il prezzo per la rinuncia a disporre di una somma di denaro e quindi a sfruttare occasioni di investimento di altro tipo;
- come compenso per la perdita di valore d'acquisto causata da una svalutazione della moneta;
- come remunerazione del rischio che chi presta denaro affronta nell'eventualità che il debitore fallisca o sia insolvente.

CHE COS'È IL MONTANTE

La somma del Capitale e dell'Interesse dà luogo al
Montante.

Quindi il montante può essere definito come l'importo spettante a colui che ha prestato il denaro alla fine dell'operazione, importo comprendente il capitale iniziale prestato più l'interesse maturato.

La somma corrisposta per la detenzione temporanea delle somme è definita "interesse".

L'importo complessivamente restituito, comprensivo di capitale ed interessi viene detto "montante".

La quantità di interessi è direttamente proporzionale a tre grandezze:

1. Capitale prestato
2. Durata del finanziamento
3. Tasso applicato

L'ammontare degli interessi è infatti prodotta dalla loro moltiplicazione, in base alla formula:

Capitale x Tasso Annuo x giorni

36500

Esempio: Gli interessi su un prestito di 10.000 Euro al 12% dal 1° gennaio al 15 febbraio (45 giorni) saranno pari a:

$$(10.000 \times 12 \times 45) / 36.500 = 147,95 \text{ Euro.}$$

Il tasso nominale applicato può avere anche una base diversa da quella annua. Potrebbe trattarsi per esempio di un tasso mensile o semestrale. In tal caso sarà pari al tasso annuo diviso per il numero di pagamenti annuali.

La definizione del tasso di periodo risulta utile a semplificare i calcoli nella costruzione dei piani di ammortamento rateali.

ESEMPIO: Con un tasso nominale annuo del 6% e pagamento mensile si potranno effettuare i calcoli applicando al debito residuo un tasso di interesse dello 0,5% al mese (6% / 12 pagamenti annui).

CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

La capitalizzazione consiste nel determinare gli interessi scaturiti dal prestito di una somma di denaro.

La capitalizzazione può essere di due tipi:
semplice
composta

La capitalizzazione semplice si chiama così perché l'interesse viene calcolato sempre sul capitale iniziale secondo la formula iniziale:

$$I = Cit$$

Al momento della riscossione l'interesse viene sommato al capitale, diventando montante secondo questa nuova formula:

$$M = C + I = C + Cit = C(1 + it)$$

Pertanto l'interesse è proporzionale a:

C = capitale

t = tempo

i = tasso di interesse

CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

La capitalizzazione composta avviene sommando l'interesse al montante e di seguito calcolati gli interessi nuovi. In poche parole l'interesse del periodo successivo viene calcolato sulla somma di interesse e montante alla fine del periodo precedente.

La formula derivata è la seguente:

$$M = C.(1 + i)^t$$

Dove:

M è il montante, i è l'interesse, t il tempo

Riprendiamo alcuni concetti.....

- La matematica finanziaria fornisce gli strumenti necessari per confrontare fatti finanziari che avvengono in momenti diversi. Esempio: Come posso confrontare i ricavi e i costi legati all'acquisto di un immobile, che avvengono in momenti diversi?

Le prestazioni finanziarie sono rappresentate da flussi di costo e di ricavo.

Perché una prestazione finanziaria sia definita univocamente dobbiamo conoscere:

- l'ammontare;
- la scadenza.

L'interesse

- L'interesse è il prezzo d'uso del capitale.
- Il saggio (tasso) d'interesse (r) può essere espresso in **termini percentuali** ($r = 5\%$) o in **termini unitari** ($r = 0,05$). **L'interesse unitario** è l'interesse maturato da una unità di moneta in un anno.
- Il saggio di interesse è **direttamente proporzionale al rischio** (ad un rischio maggiore corrisponde un maggiore tasso di interesse).

Il montante

- Il montante è la somma del capitale e dei relativi interessi.
- Il montante unitario (q) è la somma fra un capitale pari a 1 e degli interessi maturati in un anno:

$$M = C_0 + C_0 r = C_0 (1 + r) = C_0 q$$

$$(\text{es. } r = 0,05 \quad q = 1,05).$$

Interesse semplice e composto

L'interesse semplice

- gli interessi maturati non maturano a loro volta altri interessi;
- Si usa quando si considera un periodo di tempo uguale o inferiore ad 1 anno.

L'interesse composto

- gli interessi maturati maturano a loro volta altri interessi;
- Si usa quando si considera un periodo di tempo superiore ad 1 anno.

Interesse semplice: periodo uguale all'anno

- Interesse $I = C_0 \times r$
- Montante $M = C_0 \times q$
- Valore scontato $C_0 = M / q$

La somma di 1.000 Euro viene depositata in banca all'interesse del 5%. Si vuol conoscere l'ammontare: a) degli interessi dopo un anno; b) del montante dopo un anno.

$$I = C_0 r = 1.000 \times 0,05 = 50 \text{ Euro}$$

$$M = C_0 + I = C_0 (1+r) = C_0 q = 1.000 \times 1.05 = 1.050 \text{ Euro}$$

Interesse semplice: periodo inferiore all'anno

- La durata viene indicata come **frazione di anno**: $n = \text{gg}/365$
- Interesse $I = C_0 \cdot r \cdot n$
- Montante $M = C_0 (1 + r \cdot n)$
- Valore scontato $C_0 = M / (1 + r \cdot n)$

La somma di 1.000 Euro viene depositata in banca per 90 giorni all'interesse del 5%. Si vuol conoscere l'ammontare: a) degli **interessi**; b) del **montante**.

$$I = C_0 \cdot r \cdot n = 1.000 \times 0,05 \times (90 / 365) = 12,39 \text{ Euro.}$$

$$M = C_0 + C_0 \cdot r \cdot n = C_0 (1 + r \cdot n) = 1.012,39 \text{ Euro.}$$

Interesse composto: la determinazione del montante dopo n anni:

Dopo 1 anno: $C_1 = C_0 + C_0 r = C_0 (1+r)$

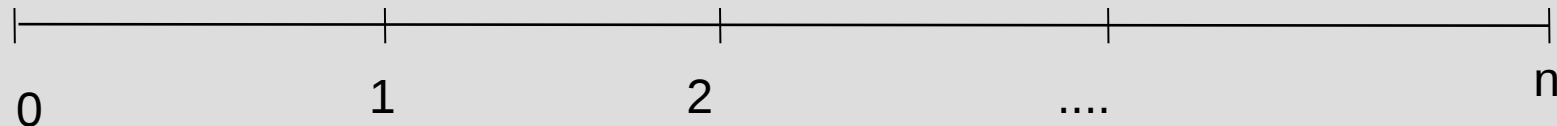
Dopo 2 anni: $C_2 = C_1 + C_1 r = C_1 (1+r)$

$$C_2 = C_0 (1+r) (1+r)$$

$$C_2 = C_0 q^2$$

Quindi:

$$C_n = C_0 q^n$$



Interesse composto: esempio

- A quanto ammonterà, tra **10 anni** (n), il capitale di **1.000 Euro** (C_0) investito in titoli al saggio del **5%**?

$$M = C_0 q^n$$

$$1.000 \times 1,05^{10} = 1.629 \text{ Euro.}$$

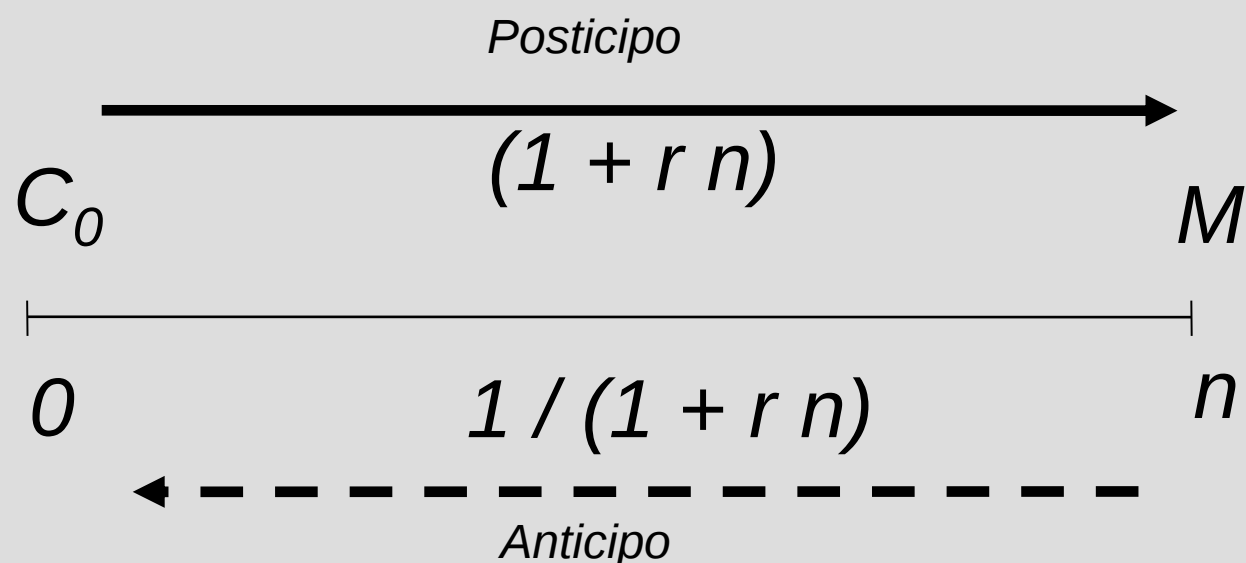
- Se l'interesse non fosse composto, cioè se gli interessi non maturassero altri interessi, il montante sarebbe inferiore: 1.500 Euro.

Spostamento di capitali nel tempo

- Non è possibile addizionare, sottrarre o confrontare tra loro valori differiti nel tempo, se prima non sono riportati allo stesso momento.
- E' necessario individuare le formule che consentono di anticipare o di posticipare ciascun valore.
- Un valore spostato nel futuro si trasforma in montante, spostato nel passato si trasforma in valore scontato.

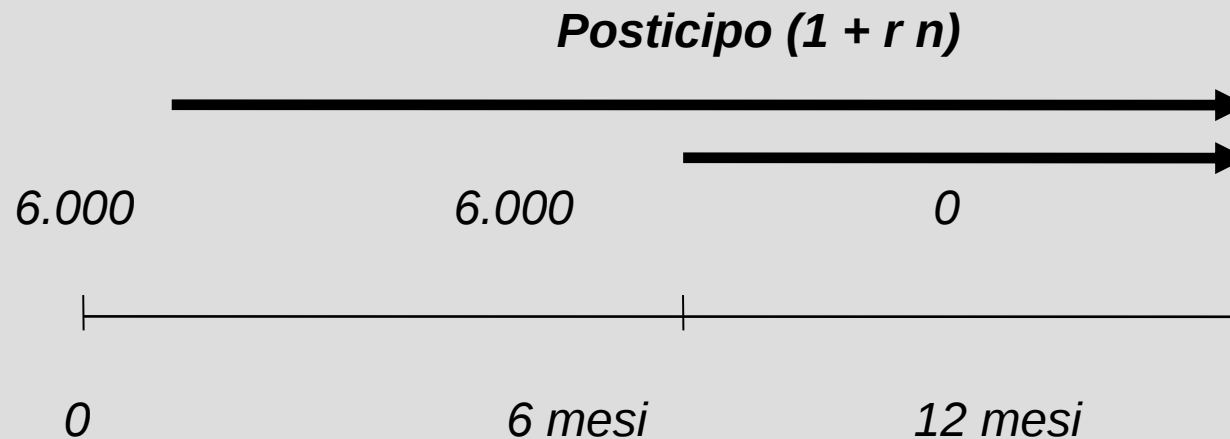
Periodi inferiori o uguali all'anno

- *Coefficiente di posticipazione: $(1 + r n)$*
- *Coefficiente di anticipazione: $1/(1+rn)$*



Esercizio

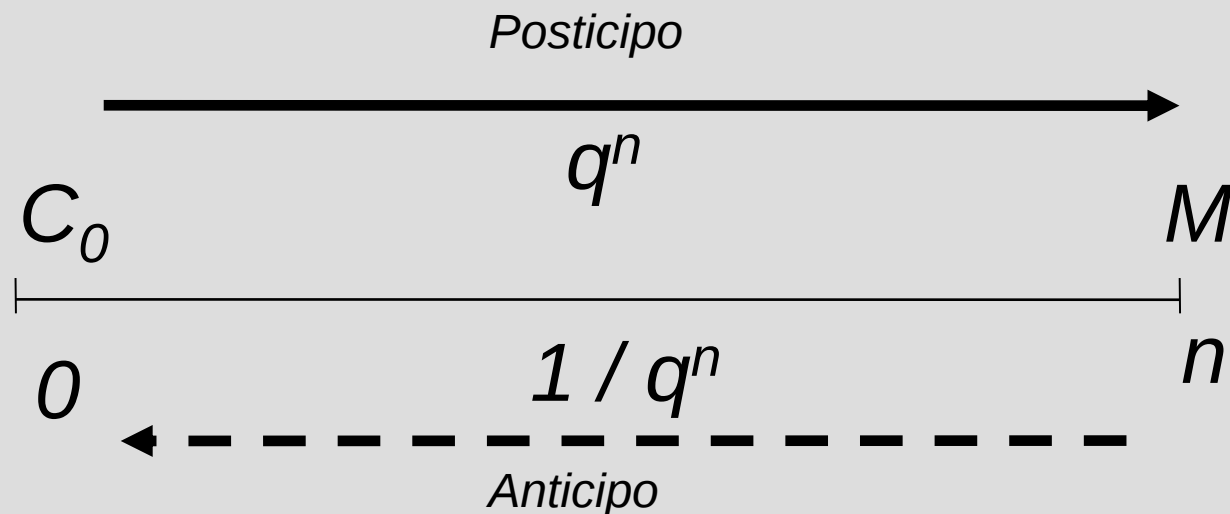
Il canone annuo del vostro appartamento è suddiviso in due rate anticipate di 6.000 Euro ciascuna. A quanto ammonta l'affitto percepito dal proprietario, riferito a fine anno? Sia $r = 5\%$.



$$Ca = 6.000 \times (1 + 0.05) + 6.000 (1 + 0.05 \times 1/2) = 6.000 \times 1.05 + 6.000 (1.025) = 12.450$$

Periodi superiori all'anno

- *Coefficiente di posticipazione: q^n*
- *Coefficiente di anticipazione: $1/q^n$*



Esercizio

Comperate un nuovo computer che pagate in 2 rate da 2.000 Euro: la prima subito, la seconda fra due anni. Quanto costa il computer al momento attuale ($r = 6\%$) ?



$$2.000 + 2.000 \times 1 / 1.06^2 = \mathbf{3.780 \text{ Euro}}$$

Un milione di Euro tra n anni scontato ad oggi

All'aumentare del **tempo e/o del saggio diminuisce** il valore

Saggio	1 anno	2 anni	3 anni	10 anni	20 anni
1%	990.099	980.296	970.590	905.287	819.544
2%	980.392	961.169	942.322	820.348	672.971
3%	970.874	942.596	915.142	744.094	553.676
4%	961.538	924.556	888.996	675.564	456.387
5%	952.381	907.029	863.838	613.913	376.889
6%	943.396	889.996	839.619	558.395	311.805
7%	934.579	873.439	816.298	508.349	258.419
8%	925.926	857.339	793.832	463.193	214.548
9%	917.431	841.680	772.183	422.411	178.431
10%	909.091	826.446	751.315	385.543	148.644

Valore e tasso di sconto

Valore attuale di 1 milione collocato tra vent'anni

