

nova **M**ea
Schola

Centro di istruzione e formazione

LEZIONE 2: LE RENDITE

La parola rendita nel linguaggio comune ha il significato di una somma che periodicamente viene incassata.

Vivere di rendita, per esempio, significa avere a disposizione una certa somma ogni mese che deriva da interessi su capitali, da risparmi, da lasciti o altro.

In Matematica Finanziaria il termine RENDITA ha un significato molto più ampio ed è legato sia alla riscossione che al pagamento di somme stabilite a scadenze prefissate.

La rendita è una successione di importi (rate) da riscuotere o da pagare in epoche stabilite (scadenze) ad intervalli di tempo determinati.

Le rendite possono essere **costanti** o **variabili**, a seconda del contratto che si stabilisce.

La situazione può essere rappresentata sulla retta dei tempi, indicando in alto le rate da riscuotere o da pagare e in basso i tempi della riscossione o del pagamento.



CARATTERISTICHE

● **RATA** Importo che viene riscosso o pagato ad ogni periodo

● **NUMEROSITÀ** Numero di rate costituenti la rendita:

Rendite Temporanee con un numero finito di rate

Rendite Perpetue con un numero illimitato di rate

● **PERIODO** L'intervallo di tempo tra la riscossione o il pagamento di una rata e l'altra:

Rendite Annue se il tempo che intercorre tra la riscossione di una rata e l'altra è di 1 anno;

Rendite Poliennali se il tempo che intercorre tra la riscossione di una rata e l'altra è di più anni;

Rendite Frazionate se il tempo è una frazione di anno.

● **DECORRENZA** Indica quando può essere riscossa la prima rata:

Rendite Immediate quando il pagamento delle rate avviene entro il primo periodo dopo la stipula del contratto

Rendite Differite quando il pagamento delle rate avviene dopo più periodi.

Per esempio, si può stipulare un contratto con una Assicurazione che prevede che, dietro il pagamento di € 30.000, si abbia diritto, a partire da subito, a una rendita vitalizia di € 1000 all'anno. Questa è una rendita immediata. La pensione è invece una rendita differita, perché il pagamento avviene al termine della carriera lavorativa dopo aver raggiunto una certa età.

● **SCADENZA** Momento in cui può essere riscossa la prima rata e le altre una volta fissata la decorrenza:



Rendita Posticipata quando il pagamento o la riscossione della rata avviene al termine di ogni periodo

Rendita Anticipata quando il pagamento o la riscossione della rata avviene all'inizio di ogni periodo

Tornando all'esempio precedente, il contraente della polizza assicurativa può avere il pagamento:

- all'inizio dell'anno di decorrenza della polizza, e in questo caso la rendita è anticipata;
- alla fine dell'anno, e la rendita è posticipata.

Facciamo un ulteriore esempio: supponiamo che un genitore si preoccupi di accantonare del denaro, diciamo € 1000 all'anno, a partire dalla nascita del proprio figlio, che possa consentirgli di completare il corso di studi.

Il figlio, una volta giunto all'Università, usufruirebbe della somma accantonata godendo di una rata annua o mensile fino al completamento dei cinque anni del corso di studi.

Il figlio del genitore avveduto, arrivato all'Università, avrà una rendita:

- formata da 5 rate annue (oppure 60 mensili) di importo costante;
- temporanea, perché la durata è di soli 5 anni;
- differita, perché inizierà a percepirla al momento dell'iscrizione all'Università;
- anticipata, perché è stato disposto che la rata gli venga corrisposta all'inizio di ogni anno (o mese).

Il regime finanziario che riguarda una rendita è quello di **Interesse** o di **Sconto Composto**

.

Come in qualunque problema che riguardi movimenti di denaro, le quantità interessanti sono il Montante e il Valore Attuale.

Le rate di una rendita sono dei capitali che scadono in epoche diverse; pertanto di ogni singola rata si può calcolare sia il montante che il valore attuale - in regime di capitalizzazione composta - ad un certo tasso i , detto tasso di valutazione della rendita. Di conseguenza anche di una rendita si possono calcolare i valori suddetti.

■ **MONTANTE** La somma del capitale iniziale e degli interessi, maturati dall'epoca dell'impiego, convenzionalmente epoca 0, all'epoca t . Nel caso di una rendita il montante è la somma dei montanti delle singole rate, calcolati rispetto ad un'epoca posteriore (o successiva) alle scadenze di tutte le rate.

■ **VALORE ATTUALE** valore effettivo di un capitale quando si rende anticipatamente disponibile una somma esigibile in un'epoca futura. Nel caso di una rendita esso è la somma dei valori attuali delle singole rate, calcolati rispetto ad un'epoca anteriore (o precedente) alle scadenze di tutte le rate.

RENDITE POSTICIPATE: MONTANTE

Il montante di una rendita immediata posticipata è dato dalla seguente formula:

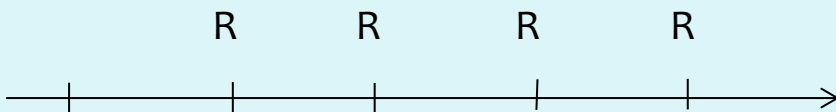
$$M(t) = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

L'espressione $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ si indica con il simbolo $s_{n \rceil i}$ che si legge *s* posticipato, figurato *n*, al tasso *i*.

$$M = R \cdot s_{n \rceil i}$$

dove

$$s_{n \rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$



0 1 2 3 4 t

RENDITE POSTICIPATE: VALORE ATTUALE

Il valore attuale di una rendita immediata posticipata è dato dalla seguente formula:

$$V = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

L'espressione $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ si indica con il simbolo $a_{n \rceil i}$ che si legge *a* posticipato, figurato *n*, al tasso *i*.

$$V = R \cdot a_{n \rceil i}$$

dove

$$a_{n \rceil i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

RENDITE ANTICIPATE: MONTANTE

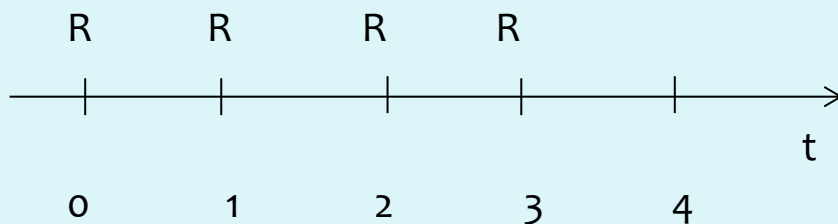
Il montante di una rendita immediata anticipata è dato dalla seguente formula:

$$M(t) = R \cdot (1 + i) \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

L'espressione $(1 + i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ si indica con il simbolo $\ddot{s}_{n \mid i}$ che si legge s anticipato, figurato n , al tasso i .

$$M = R \cdot \ddot{s}_{n \mid i}$$

$$\text{dove } \ddot{s}_{n \mid i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1 + i)$$



RENDITE ANTICIPATE: VALORE ATTUALE

Il valore attuale di una rendita immediata anticipata è dato dalla seguente formula:

$$V = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \cdot (1 + i)$$

L'espressione $\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \cdot (1 + i)$ si indica con il simbolo $\ddot{a}_{n \mid i}$ che si legge *a* anticipato, figurato *n*, al tasso *i*.

$$V = R \cdot \ddot{a}_{n \mid i} \quad \text{dove} \quad \ddot{a}_{n \mid i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \cdot (1 + i)$$

RENDITE DIFFERITE POSTICIPATE

Il valore attuale di una rendita differita posticipata è dato dalla seguente formula:

$$V = R \cdot a_{n \rceil i} \cdot (1 + i)^{-p}$$

L'espressione $a_{n \rceil i} \cdot (1 + i)^{-p}$ si indica con il simbolo $p / a_{n \rceil i}$ che si legge *a* posticipato, figurato *n*, al tasso *i*, differito *p*.

$$V = R \cdot p / a_{n \rceil i}$$

dove

$$p / a_{n \rceil i} = a_{n \rceil i} \cdot (1 + i)^{-p}$$

RENDITE DIFFERITE ANTICIPATE

Il valore attuale di una rendita differita anticipata è dato dalla seguente formula:

$$V = R \cdot \ddot{a}_{n|i} \cdot (1 + i)^{-p}$$

L'espressione $\ddot{a}_{n|i} \cdot (1 + i)^{-p}$ si indica con il simbolo $p/\ddot{a}_{n|i}$ che si legge *a* anticipato, figurato *n*, al tasso *i*, differito *p*.

$$V = R \cdot p/\ddot{a}_{n|i}$$

dove

$$p/\ddot{a}_{n|i} = \ddot{a}_{n|i} \cdot (1 + i)^{-p}$$

RENDITE PERPETUE IMMEDIATE POSTICIPATE E ANTICIPATE

Il valore attuale di una rendita perpetua immediata posticipata è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{R}{i}$$

Il valore attuale di una rendita perpetua immediata anticipata è dato dalla seguente formula:

$$V = R \cdot \frac{1}{i} \cdot (1 + i)$$

ESEMPI

- ◆ Mario deve riscuotere € 500 all'inizio di ogni anno per 6 anni. Si tratta di una rendita che è costante, perché l'importo della rata è fisso; annua, perché il periodo che intercorre tra una rata e l'altra è di 1 anno; temporanea, perché il numero delle rate è 6, cioè un numero finito; anticipata, perché la riscossione avviene all'inizio dell'anno, cioè all'inizio del periodo di competenza.
- ◆ Lucia deve pagare € 60,00 alla fine di ogni mese per 3 anni. La rata è di € 60,00, quindi si tratta di una rendita costante; il tempo che intercorre tra un periodo e l'altro è di 1 mese, e quindi la rendita è frazionata; il numero delle rate è 36, quindi è una rendita temporanea; il pagamento è fatto alla fine del mese, quindi è una rendita posticipata.

ESEMPI

- ◆ Un artigiano ha in affitto un capannone per il quale paga, semestralmente, un canone di locazione di € 5.000. Il contratto scade tra 4 anni. Si tratta di una rendita costante che è frazionata (il canone di affitto è semestrale), temporanea (il contratto è valido 4 anni), immediata e anticipata (l'affitto si paga alla stipula del contratto ed è anticipato)
- ◆ Fabio potrà riscuotere, a partire da oggi finché sarà in vita, € 1000 ogni tre mesi alla scadenza di ogni periodo. La rendita è costante ed evidentemente frazionata, è perpetua perché il numero delle rate non è precisata, è immediata, è posticipata perché il pagamento avviene alla fine del trimestre.

ESERCIZIO 1

Mario vuole costituire la somma di € 6000 effettuando 12 versamenti annui posticipati al tasso del 5%. Calcolare:

- a) la rata di costituzione;
- b) il fondo di costituzione dopo il versamento della sesta rata.

SVOLGIMENTO

Dati :

$M = € 6000$ $n = 12$

versamenti annui $i = 5\%$

a) La rata di costituzione si ricava dalla formula del montante di una rendita:

$$M(t) = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$R = \frac{M}{s_{n \mid i}} = \frac{6000}{\frac{(1+0,05)^{12}-1}{0,05}} = € 376,95$$

b) Si conosce la rata, pertanto, l'ammontare del fondo dopo il versamento della sesta rata è uguale al precedente ma con $n = 6$:

$$F(6) = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 376,95 \cdot \frac{(1+0,05)^6 - 1}{0,05} = \text{€ } 2563,98$$

ESERCIZIO 2

Giulia vuole depositare su un fondo il cui tasso di rendimento annuo è del 13%, € 15000 con l'intento di prelevare mensilmente in via posticipata € 600,00. Dopo quanto tempo avviene l'ultimo prelievo?

SVOLGIMENTO

Dati:

$$VA = € 15000$$

$$= 13\%$$

Rata Mensile € 600,00 posticipata

Il tasso d'interesse è annuo, mentre i prelievi sono mensili, pertanto non è conforme è necessario trasformarlo utilizzando la formula del **Tasso Equivalente**:

$$i_k = \sqrt[k]{1 + i} - 1$$

$$i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0,13} - 1 = 0,010$$

Il valore attuale quindi diventa:

$$V = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$
$$15000 = 600 \frac{1 - (1 + i_{12})^{-n}}{i_{12}}$$

Per ricavare n lo isoliamo tenuto conto che rappresenta un esponente per altro negativo:

$$\frac{15000}{600} = \frac{1 - (1 + i_{12})^{-n}}{i_{12}}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$(1 + i_{12})^{-n} = 1 - 25 i_{12}$$

Si considerano i logaritmi naturali di entrambi i membri:

$$\ln(1 + i_{12})^{-n} = \ln(1 - 25 i_{12}))$$

E per la proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$- n \ln(1 + i_{12}) = \ln(1 - 25 i_{12}))$$

$$n = - \frac{\ln(1 - 25 \cdot 0,010)}{\ln(1 + 0,010)} = 29$$

L'ultimo prelievo avviene dopo 2 anni e 5 mesi.

ESERCIZIO 3

Nel costituire in modo anticipato in 16 semestri un certo capitale al tasso del 4% semestrale, il fondo di cui dispone Maria alla fine del sesto semestre ammonta a € 23020,76. Determinare l'importo della rata costante e il capitale che si vuole costituire.

SVOLGIMENTO

Dati:

$$M_6 = 23020,76$$

$$i = 4\%$$

16 semestri

Per determinare l'importo della rata costante si utilizza la formula inversa del montante di una **rendita immediata anticipata**:

$$R = \frac{M_6}{(1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$
$$R = \frac{23020,76 \cdot 0,04}{[(1+0,04)^6 - 1](1+0,04)} = \text{€ } 3337,17$$

Per determinare il capitale che si vuole costituire è necessario calcolare il montante dopo aver fatto l'ultimo versamento (16 rate):

$$M_{16} = R \cdot (1 + i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$3337,17 \cdot (1 + 0,04) \cdot \frac{(1+0,04)^{16} - 1}{0,04} = \text{€ } 75745,46$$

Il risultato rappresenta l'importo del fondo dopo aver fatto l'ultimo versamento.

ESERCIZIO 4

Sofia ha intenzione di versare ogni 4 mesi una rata R per 10 anni consecutivi, in modo che un periodo dopo l'ultimo versamento abbia a disposizione un montante pari a € 15000. Sapendo che la capitalizzazione avviene ad un tasso costante annuo del 3%, calcolare quale rata Carla dovrà versare.

SVOLGIMENTO

Dati:

$M = € 15000$

$i = 3\%$ annuo

$n = 30$ (3 rate per ogni anno per 10 anni)

Essendo che si fa riferimento ad un periodo dopo l'ultimo versamento, si tratta di una **rendita anticipata**. Il tasso d'interesse è annuo pertanto non è conforme, è necessario trasformarlo in tasso quadrimestrale utilizzando la formula del **Tasso Equivalente**:

$$i_k = \sqrt[k]{1+i}$$

$$-1 = i_3 = \sqrt[3]{1+0,03} \quad 0,0099$$

Applicando la formula del montante di una rendita immediata anticipata si ottiene:

$$M(t) = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$15000 = R \cdot (1+0,0099) \cdot \frac{(1+0,0099)^{30} - 1}{0,0099}$$

$$R = \frac{15000}{35,05} = \text{€ } 427,96$$

ESERCIZIO 5

Si vuole determinare il valore attuale di una rendita posticipata, formata da 5 rate annue di € 2500 con differimento di 5 anni, valutata al tasso annuo del 3,5%.

SVOLGIMENTO

Dati:

$R = € 2500$ (posticipata) n

$= 5$

p (differimento) $= 5$ $i = 3,5\%$ (tasso annuo conforme al periodo della rata e del differimento)

Per calcolare il Valore Attuale, si applica la seguente formula:

$$V = R \cdot a_{n \rceil i} \cdot (1 + i)^{-p}$$

$$V = 2500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,035)^{-5}}{0,035} \cdot (1 + 0,035)^{-5} = \text{€ } 9503,88$$

ESERCIZIO 6

Sofia vuole regalare una rendita di € 25000 all'anno per 6 anni al tasso annuo del 5,75% a partire dal momento della sua laurea. Tuttavia al momento attuale Luca riscuote la sua rendita, accordandosi con una finanziaria per un valore attuale di € 100000. Si vuole sapere fra quanto tempo Luca dovrà laurearsi per soddisfare le richieste della finanziaria.

SVOLGIMENTO

Dati: $R = €$

25000 $n = 6$

$i = 5,75\%$

$V = 100000$

Si applica la formula del valore attuale di una rendita differita anticipata:

$$V = R \cdot \ddot{a}_{n \mid i} \cdot (1 + i)^{-p}$$

$$100000 = 25000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,0575)^{-6}}{0,0575} \cdot (1 + 0,0575)^{-p}$$

$$\frac{1 - (1 + 0,0575)^{-6}}{0,0575} \cdot (1 + 0,0575)^{-p} = 4$$

Svolgendo i relativi calcoli si ottiene:

$$1,0575^{-p} = 0,7631$$

Considerando i logaritmi decimali di entrambi i membri:

$$\log(1,0575)^{-p} = \log(0,7631)$$

Si ottiene:

$$p = \frac{\log(0,7631)}{\log(1,0575)} = 4,83$$

= 5 anni p

ESERCIZIO 7

Calcolare il valore attuale di una rendita perpetua nel caso di una rendita posticipata, con rata di € 2500 all'anno, valutata al tasso annuo del 2%.

SVOLGIMENTO

Dati: $R = €$

2500 $i = 2\%$

annuo

Si applica la formula della rendita perpetua immediata posticipata:

$$V = \frac{R}{i}$$

$$V = \frac{2500}{0,02} = € 125000$$

ESERCIZIO 8

Calcolare il valore attuale di una rendita perpetua nel caso di una rendita di € 150,00, da riscuotere all'inizio di ogni trimestre, valutata al tasso annuo del 3,2%.

SVOLGIMENTO

Dati:

$R = € 150,00$ trimestrale i

$= 3,2\%$ annuo

Il tasso d'interesse è annuo pertanto non è conforme, è necessario trasformarlo utilizzando la formula del

Tasso Equivalente:

$$-1 \quad i_k = \sqrt[k]{1+i}$$
$$-1 = i_4 = \sqrt[4]{1+0,032}$$

0,00791

Si applica la formula della rendita perpetua immediata anticipata:


$$V = R \cdot \frac{1}{i} \cdot (1 + i)$$

$$V = \frac{150}{0,00791} \cdot (1 + 0,00791) = \text{€ } 19113,34$$